11 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Página 311

REFLEXIONA Y RESUELVE

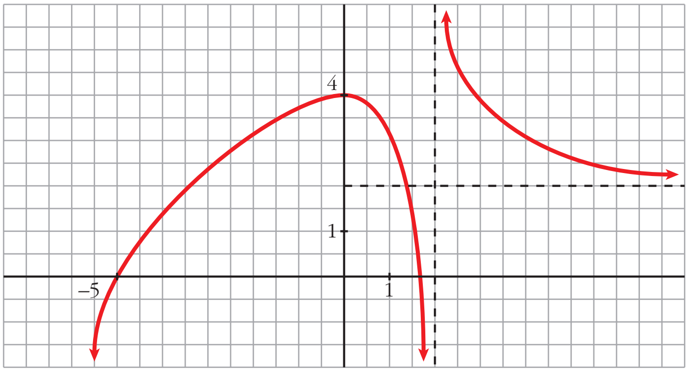
Descripción de una gráfica

- **Copia en tu cuaderno los datos encuadrados en rojo. A partir de ellos, y sin mirar la gráfica que aparece al principio, representa esta función sobre unos ejes coordenados dibujados en papel cuadriculado.**

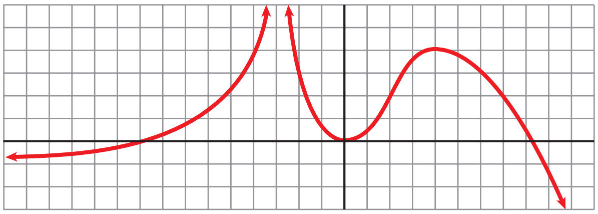
  (La solución está en el propio ejercicio).

- **Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:**

  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
  - $f(0) = 4; \; f'(0) = 0$
  - $f(-5) = 0; \; f(1{,}75) = 0$
  - **f es derivable en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x = 2$.**



- **Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar a la de los apartados anteriores, la siguiente función:**



- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0;\ f(0) = 0;\ f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4;\ f'(4) = 0$

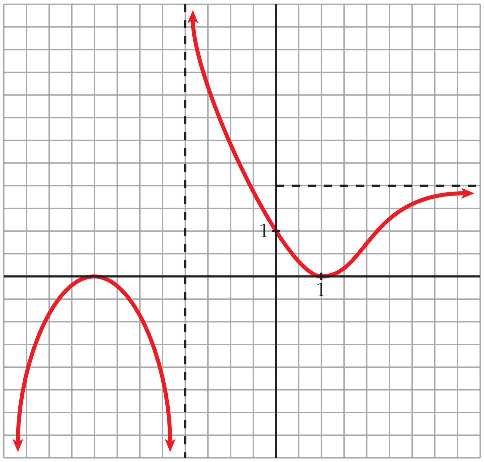
- **Representa sobre unos ejes en papel cuadriculado una gráfica inventada por ti. Descríbela en papel aparte. Dale la descripción a tu compañera o compañero para que la represente.**

  Representa tú la suya.

  Comparad cada representación con la curva original. Discutid las diferencias que observéis.

  ¿Hay algún error en la representación? ¿Hay, acaso, error en la descripción?

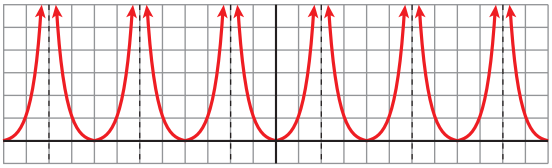
  ¿Es todo correcto?



Por ejemplo:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to -4^-} f(x) = -\infty;\quad \lim_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0;\ f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0;\ f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

■ **Observa esta gráfica:**



- **Halla la ordenada para las siguientes abscisas:**

  $x = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 3,\ \ x = –7,\ \ x = 12,\ \ x = –400,\ \ x = 13,\ \ x = –199$

- **¿En qué puntos no está definida esta función?**
- **¿Qué tramo de la función te bastaría conocer para hacerte una idea exacta de cómo es la gráfica?**
- **¿Te sugiere esta curva algún tipo de simetría o periodicidad?**

- $f(0) = 0;\ \ f(1) = 1;\ \ f(3) = 1;\ \ f(–7) = 1$

  $f(12) = 0;\ \ f(–400) = 0;\ \ f(13) = 1;\ \ f(–199) = 1$

  (En general, $f(4k) = 0;\ \ f(4k + 1) = f(4k – 1) = 1$ y no existe $f(x)$ en $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$).

- La función no está definida en los puntos de la forma $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- Bastaría con conocer la función para $x \in [0, 2)$, si supiéramos que es par y que es periódica de período 4.

- Simetría → Es una función par (simétrica respecto al eje Y).

  Periodicidad → Es periódica de período 4.

Página 312

1. Halla el dominio de estas funciones:

a) $y = x^3 – 5x^2 + 7x + 3$

b) $y = \dfrac{3x^3 + 5}{x^2 – 5x + 4}$

c) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) *Dominio* = $\mathbb{R}$

b) $x^2 – 5x + 4 = 0 \ \ \rightarrow \ \ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 – 16}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

Dominio = $\mathbb{R} – \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo x → *Dominio* = $\mathbb{R}$

2. **Halla el dominio de:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = ln(x^2 + 1)$ **c)** $y = ln(x^2 - 1)$ **d)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \quad \rightarrow \quad Dominio = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \quad \rightarrow \quad Dominio = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad Dominio = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad Dominio = \mathbb{R} - \{0\}$

Página 313

3. **Halla las simetrías y las periodicidades; di dónde son continuas y dónde derivables:**

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = sen\ x + 1/2\ (sen\ 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y.

No es periódica.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) $Dominio = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) $Dominio = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d) $Dominio = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e) *Dominio* = $\mathbb{R}$

$$f(-x) = \text{sen}(-x) + \frac{1}{2}\left(\text{sen}(-2x)\right) = -\text{sen}\, x - \frac{1}{2}\left(\text{sen}(2x)\right) = -f(x)$$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

Es periódica de período 2π.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Página 314

4. Halla las ramas infinitas de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

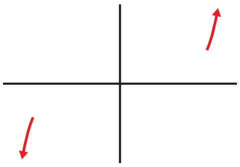
d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

e) $y = ln(x^2 + 1)$

f) $y = 2^{x-1}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

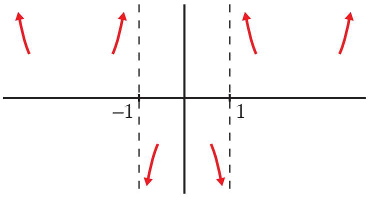
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

- *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\}$ Ramas parabólicas
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$



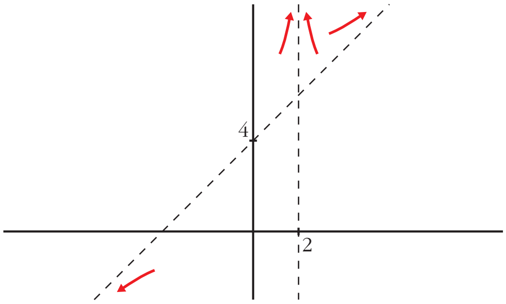
c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = \dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = x + 4 + \dfrac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4}$

- *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $y = x + 4$ es una asíntota oblicua.

  $$f(x) - (x + 4) = \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4} \rightarrow \begin{cases} f(x) - (x+4) > 0 & \text{si } x \to +\infty \\ f(x) - (x+4) < 0 & \text{si } x \to -\infty \end{cases}$$

- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$



d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

- *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = -1 \rightarrow$ Hay asíntota oblicua.

  $$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 - 2x} + x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x} - x\right] =$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)} =$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{2} = 1$$

  $y = -x + 1$ es una asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

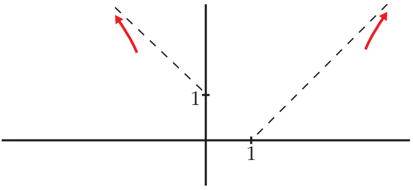
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = 1 \rightarrow$ Hay asíntota oblicua.

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 - 2x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -1$$

$y = x - 1$ es una asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.



- No hay asíntotas verticales.
- Posición de la curva respecto a las asíntotas:

$f(x) - (-x + 1) < 0$ si $x \to -\infty$

$f(x) - (x - 1) < 0$ si $x \to +\infty$

e) $y = ln(x^2 + 1)$

- *Dominio* = $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

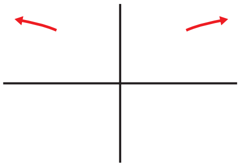
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

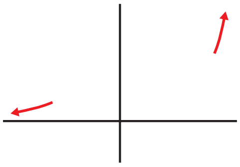
} Ramas parabólicas

- No hay asíntotas verticales.



f) $y = 2^{x-1} > 0$ para todo x.

- *Dominio* = $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \to y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
- No hay asíntotas verticales.



Página 315

5. Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

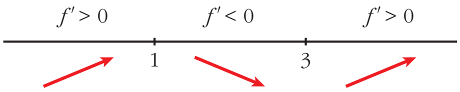
b) $y = ln(x^2 + 1)$

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- $f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

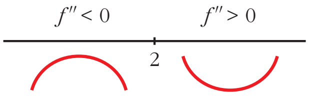


Hay un máximo en $(1, 9)$ y un mínimo en $(3, 5)$.

- $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(2, 7)$.

b) $y = ln(x^2 + 1)$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

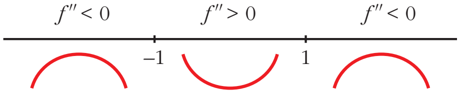
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ para } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ para } x > 0 \end{array}\right\} \text{Hay un mínimo en } (0, 0).$$

- $f''(x) = \dfrac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(-1, ln\ 2)$ y otro en $(1, ln\ 2)$.

6. Halla los puntos singulares de:

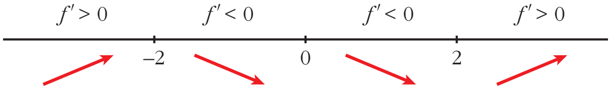
a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 15x^2(x^2 - 4) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



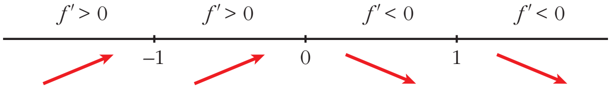
Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:



Hay un máximo en $(0, 0)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x - 2)^2 - x^3 \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{3x^2(x - 2) - 2x^3}{(x - 2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x - 2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x - 2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x - 6) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $\left(6, \dfrac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = 1 \notin$ *Dominio.*

No hay puntos singulares.

Página 317

1. Representa estas funciones:

a) $\boldsymbol{y = x^4 - 8x^2 + 7}$

b) $\boldsymbol{y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2}$

c) $\boldsymbol{y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x}$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Ramas infinitas:**

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 4x^3 - 16x$

  $$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2 - 4) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

  Puntos singulares: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje Y → $x = 0$ → $y = 7$ → Punto: $(0, 7)$

  — Con el eje X → $y = 0$ → $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

  $$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm 1 \end{cases}$$

  Puntos: $\left(-\sqrt{7}, 0\right)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $\left(\sqrt{7}, 0\right)$

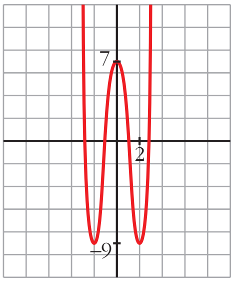
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 12x^2 - 16$

  $$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x^2 - 16 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{4}{3} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

  Puntos $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

  $$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

  Puntos: (0, 0); (2, –64); (–3, –189)

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: (0, 0)

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

  $$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 432}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \begin{cases} x \approx 2{,}86 \\ x \approx -4{,}19 \end{cases} \end{cases}$$

  Puntos: (0, 0); (2,86; 0); (–4,19; 0)

- **Puntos de inflexión:**

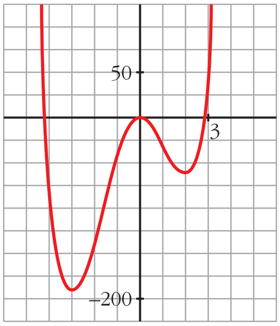
  $f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$

  $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1{,}12 \\ x \approx -1{,}79 \end{cases}$$

  Puntos: (1,12; –34,82) y (–1,79; –107,22)

- **Gráfica:**



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0$

  $$<\begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\}\text{ Puntos } (1, 7); (-1, -9); (3, -9)$$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

  $$<\begin{matrix} x = 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 6) = 0 < \begin{matrix} x = 2 \\ x \approx 3{,}65 \\ x \approx -1{,}65 \end{matrix} \end{matrix}$$

  Puntos: $(0, 0)$; $(2, 0)$; $(3{,}65; 0)$; $(-1{,}65; 0)$

- **Puntos de inflexión:**

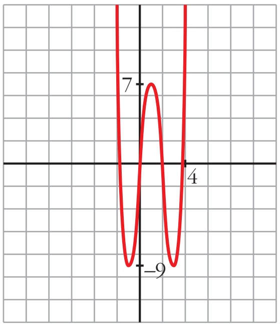
  $f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$

  $$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} < \begin{matrix} x \approx 2{,}15 \\ x \approx -0{,}15 \end{matrix}$$

  Puntos: $(2{,}15; -1{,}83)$ y $(-0{,}15; -1{,}74)$

- **Gráfica:**



2. **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$ **b)** $y = x^3 - 3x$ **c)** $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje *Y*, ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2(x-1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

  Puntos: (0, –16); (1, –17)

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje *Y* → $x = 0$ → $y = -16$ → Punto: (0, –16)

  — Con el eje *X* → $y = 0$ → $3x^4 - 4x^3 - 16 = 0$ →

  $\left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{array}\right.$ → tiene una sola raíz, que está entre –2 y –1; pues, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ y $g(-1) = 3 > 0$.

  Puntos (2, 0) y (*k*, 0), con *k* entre –2 y –1.

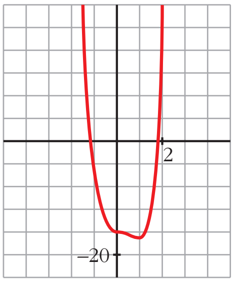
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 36x^2 - 24x$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x-2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

  Puntos: (0, –16) y $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-448}{27}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = x^3 - 3x$

- **Simetrías:**

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right.$

Puntos: (–1, 2); (1, –2)

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: (0, 0)

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0$

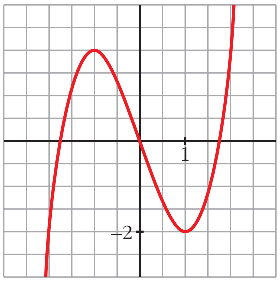
$$\left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right\} \text{ Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, 0\right); \left(\sqrt{3}, 0\right)$$

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

- **Gráfica:**



c) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Puntos: (0, 0); (–2, –4); (2, –4)

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: (0, 0)

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

Puntos: $(0, 0); \left(-2\sqrt{2}, 0\right); \left(2\sqrt{2}, 0\right)$

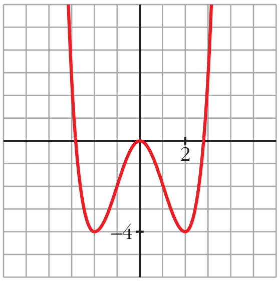
- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 3x^2 - 4$

$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Puntos: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right); \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

- **Gráfica:**



Página 319

1. Representa:

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{1 - x^2} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2} \quad \to \quad y = -x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (-x) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (-x) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2}$$

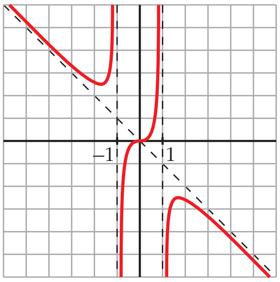
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(-x^2 + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Cortes con los ejes:**

Corta a los ejes en (0, 0).

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{-x}$.

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x} \rightarrow y = x - 2$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^2} > 0$ para todo x del dominio.

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

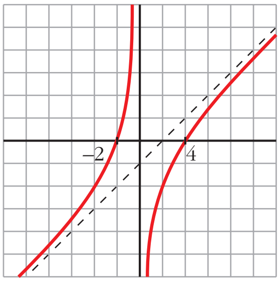
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \left< \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4 \end{array} \right.$

Puntos: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

— No corta el eje Y, pues no está definida en $x = 0$.

- **Gráfica:**



2. **Representa:**

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

- **Asíntota horizontal:**

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4} \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto: $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

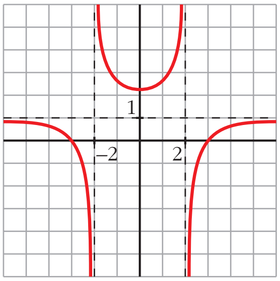
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} \rightarrow$ Punto: $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntota oblicua:**

$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - x < 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - x > 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por encima)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

No hay puntos singulares.

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

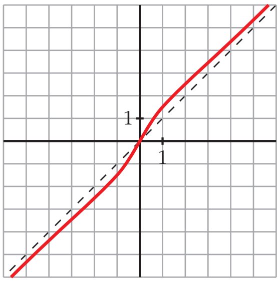
- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right\} \text{ Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right); \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

- **Gráfica:**



Página 321

1. Representa:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

- **Dominio:**

$$x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

Dominio $= (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntotas oblicuas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$y = -x - 1$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$y = x + 1$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x + 1 = 0 \quad \to \quad x = -1$

Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

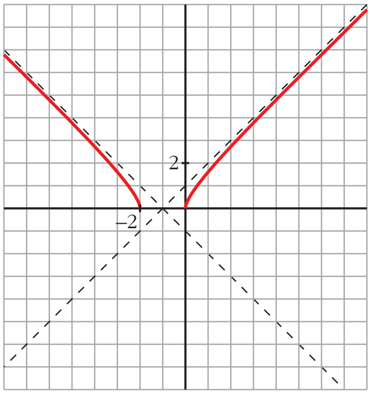
- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje X → $y = 0$ → $\sqrt{x^2 + 2x}$ → $x^2 + 2x = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

  Puntos: (0, 0) y (–2, 0)

  — Con el eje Y → $x = 0$ → $y = 0$ → Punto: (0, 0)

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

- **Dominio:**

  $x^2 - 9 = 0$ $\begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

  Dominio = $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = \sqrt{x^2 - 9} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntotas oblicuas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

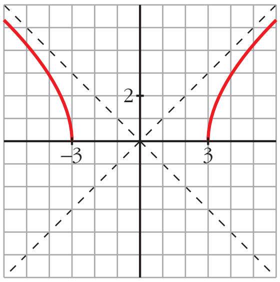
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; \sqrt{x^2 - 9} \;\to\; x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

— No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

- **Gráfica:**



2. **Representa:**

a) $y = \ln(x^2 + 4)$ **b)** $y = \ln(x^2 - 1)$

a) $y = \ln(x^2 + 4)$

- **Dominio:**

Como $x^2 + 4 > 0$ para todo x, *Dominio* $= \mathbb{R}$.

- **Simetrías:**

$f(-x) = \ln(x^2 + 4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2+4)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+4}}{1} = 0$$

Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$$

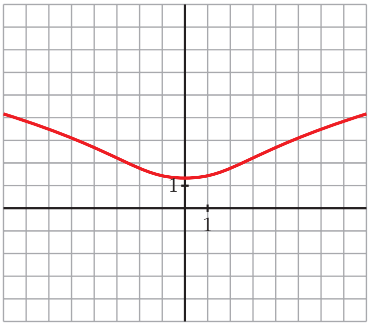
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Punto: $(0, ln\,4)$

- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 8 - 2x^2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \text{Puntos: } (-2, ln\,8) \text{ y } (2, ln\,8)$$

- **Gráfica:**



b) $y = ln\,(x^2 - 1)$

- **Dominio:**

$x^2 - 1 > 0 \;\rightarrow\;$ *Dominio* $= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetrías:**

$f(-x) = ln\,(x^2 - 1) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje *Y*.

- **Asíntotas verticales:**

  $$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

  $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

  Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

  No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en $x = 0$.

- **Puntos de inflexión:**

  $$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

  No tiene puntos de inflexión.

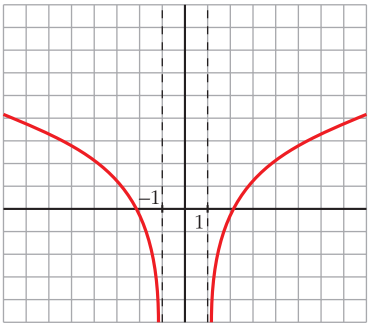
- **Puntos de corte con los ejes:**

  — Con el eje X → $y = 0$ → $ln\,(x^2 - 1) = 0$ → $x^2 - 1 = 1$

  $$x^2 = 2 \left\langle \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ Puntos: } \left(-\sqrt{2}, 0\right) \text{ y } \left(\sqrt{2}, 0\right)$$

  — No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

- **Gráfica:**



Página 322

3. Representa:

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ **b)** $y = \dfrac{e^{-x}}{-x}$ **c)** $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \cos x$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

- **Dominio:** $D = \mathbb{R} - \{0\}$
- **No es simétrica.**
- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Además, $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

  $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

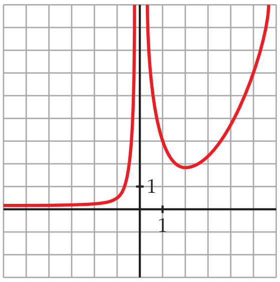
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Rama parabólica.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 2 \quad \to \quad \text{Punto } \left(2, \frac{e^2}{4}\right)$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{e^{-x}}{-x}$

- **Dominio**: $D = \mathbb{R} - \{0\}$
- **No es simétrica.**

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$ Rama parabólica.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$ $f(x) < 0$ para todo x positivo.

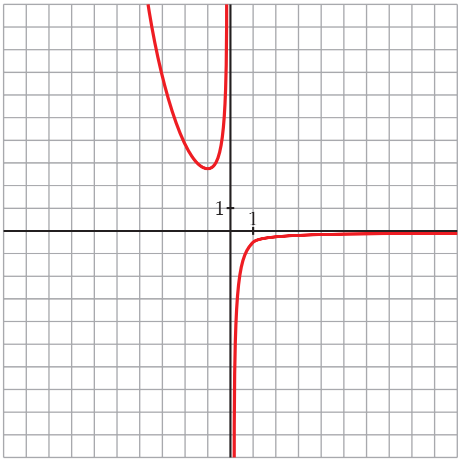
  $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(-x)^2} = \frac{e^{-x}(x + 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; \text{Punto: } (-1, -e)$$

- **Gráfica:**



c) $y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

- El período de $\cos x$ es 2π y el de $\operatorname{sen} 2x$ es π. Por tanto, la función es periódica de período 2π. La estudiamos solo en este intervalo.

- Es **derivable** en todo $\mathbb{R}$ (es suma de funciones derivables).

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = -\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = -2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x\,(2\cos x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -\operatorname{sen} x(2\cos x + 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$sen\,x = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(0,\ \dfrac{3}{2}\right) \\ x = \pi \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(\pi,\ -\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$cos\,x = -\frac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(\dfrac{2\pi}{3},\ -\dfrac{3}{4}\right) \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(\dfrac{4\pi}{3},\ -\dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

- **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2} \rightarrow$ Punto: $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow cos\,2x + 2cos\,x = 0$

$$cos^2 x - sen^2 x + 2cos\,x = 0$$

$$cos^2 x - (1 - cos^2 x) + 2cos\,x = 0$$

$$cos^2 x - 1 + cos^2 x + 2cos\,x = 0$$

$$2cos^2 x + 2cos\,x - 1 = 0$$

$$cos\,x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} \begin{cases} cos\,x = 0{,}366 \\ cos\,x = -1{,}366 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$cos\,x = 0{,}366 \begin{cases} x = 1{,}2 \\ x = 5{,}09 \end{cases}$$

Puntos: (1,2; 0); (5,09; 0)

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -2cos\,2x - cos\,x$

$f''(x) = 0 \rightarrow -2cos\,2x - cos\,x = 0$

$$-2(cos^2 x - sen^2 x) - cos\,x = 0$$

$$-2cos^2 x + 2sen^2 x - cos\,x = 0$$

$$-2cos^2 x + 2(1 - cos^2 x) - cos\,x = 0$$

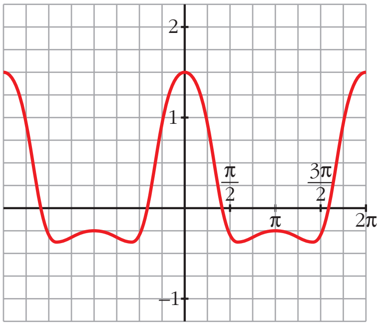
$$-2cos^2 x + 2 - 2cos^2 x - cos\,x = 0$$

$$-4cos^2 x - cos\,x + 2 = 0$$

$$cos\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 32}}{-8} \begin{cases} cos\,x = -0{,}843 \\ cos\,x = 0{,}593 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = -0{,}843 \left\langle \begin{array}{l} x = 2{,}57 \\ x = 3{,}71 \end{array}\right. \\ \cos x = 0{,}593 \left\langle \begin{array}{l} x = 0{,}94 \\ x = 5{,}35 \end{array}\right. \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \text{Puntos:} & (2{,}57;\ -0{,}63) \\ & (3{,}71;\ -0{,}63) \\ & (0{,}94;\ 0{,}44) \\ & (5{,}35;\ 0{,}45) \end{array}$$

- **Gráfica:**



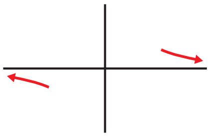
Página 323

1. ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen?

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{3x}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{x^4}{x+1}$

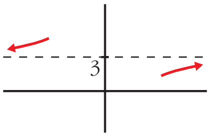
a) $y = \dfrac{1}{x+1}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \ \rightarrow \ \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

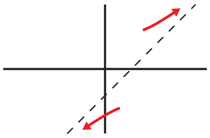


b) $y = \dfrac{3x}{x+1}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 \ \rightarrow \ \text{Asíntota horizontal: } y = 3$$

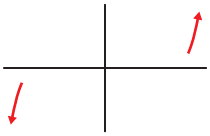


c) $y = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} \ \rightarrow \ \text{Asíntota oblicua: } y = x - 1$



d) $y = \dfrac{x^4}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$



2. **¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen?**

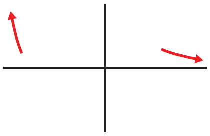
a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$ **c)** $y = x + \sqrt{x}$

d) $y = tg\ x$ **e)** $y = x\ sen\ x$ **f)** $y = x - cos\ x$

a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

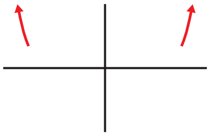
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Rama parabólica.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Asíntota horizontal: $y = 0$



b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

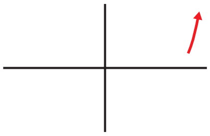


c) $y = x + \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe, pues solo está definida en $[0, +\infty)$.

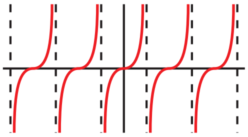
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\sqrt{x}}{x}\right) = 1 = m$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$



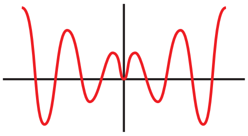
d) $y = tg\ x$

No existen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ni $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.



e) $y = x\ sen\ x$

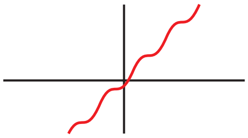
No existen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ni $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.



f) $y = x - cos\ x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - cos\ x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + sen\ x}{1}$ no existe

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - cos\ x}{x}$ no existe



Página 325

1. Representa:

a) $y = x - |x - 3| + |x + 1|$

b) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$

c) $y = |x - 5|x$

a) Intervienen dos valores absolutos, $|x + 1|$ y $|x - 3|$, que cambian de signo en las abscisas $x = -1$ y $x = 3$, respectivamente.

Por tanto:

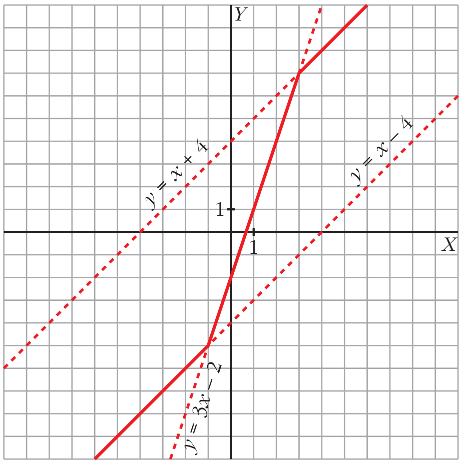
$x < -1$, $|x + 1| = -x - 1$ y $|x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 - x - 1 = x - 4$

$-1 \le x < 3$, $|x + 1| = x + 1$ y $|x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 + x + 1 = 3x - 2$

$x \ge 3$, $|x + 1| = x + 1$ y $|x - 3| = x - 3 \rightarrow y = x - x + 3 + x + 1 = x + 4$

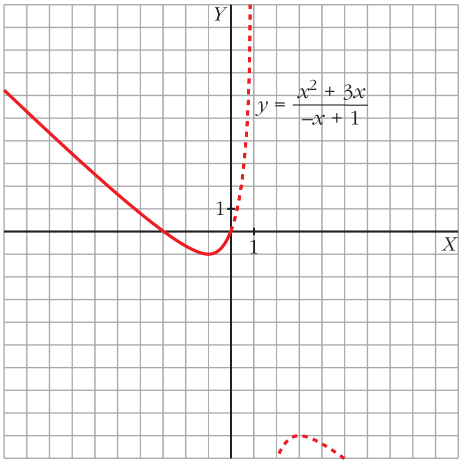
Representamos, pues, esta función:

$$y = x - |x - 3| + |x + 1| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

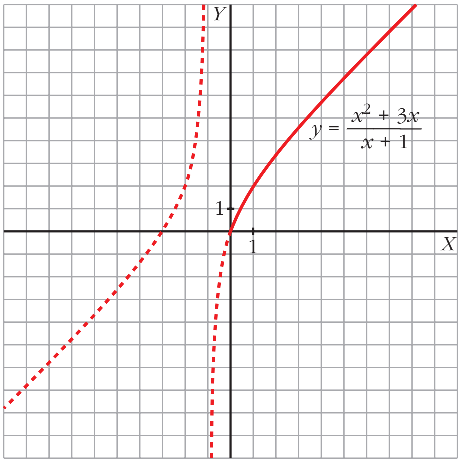


b) El único valor absoluto que interviene es $|x|$. La abscisa en donde cambia de signo x es 0. Por tanto:

$$x < 0, \ |x| = -x \ \rightarrow \ y = \frac{x^2 + 3x}{-x + 1}$$

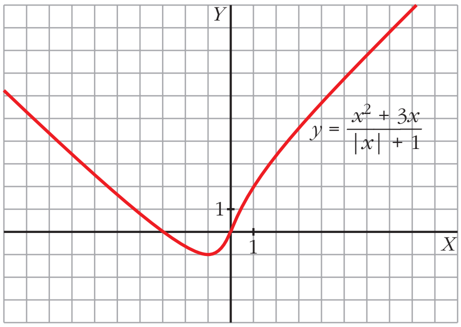


$$x \geq 0, \ |x| = x \ \rightarrow \ y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$



Representamos, pues, esta función:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1} = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x}{-x + 1} & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

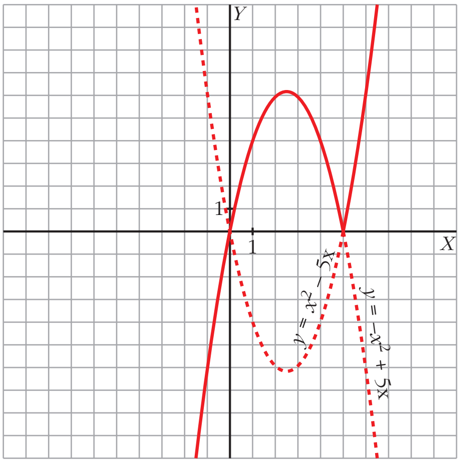


c) El único valor absoluto que interviene es $|x - 5|$. La abscisa donde cambia de signo $x - 5$ es 5. Por tanto, analizamos cómo queda la función a la izquierda y a la derecha de 5:

$x < 5 \rightarrow |x - 5| = -x + 5 \rightarrow y = (-x + 5)x = -x^2 + 5x$

$x \geq 5 \rightarrow |x - 5| = x - 5 \rightarrow y = (x - 5)x = x^2 - 5x$

$$y = |x - 5|x = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } x < 5 \\ x^2 - 5x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



Página 331

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

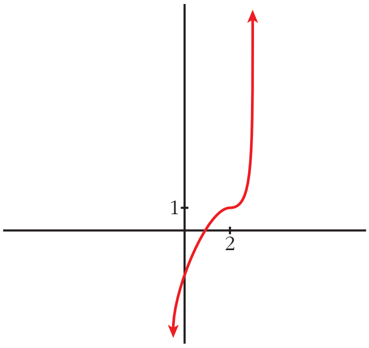
PARA PRACTICAR

Descripción de una gráfica

1 **Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$f(2) = 1$, $f'(x) \geq 0$ para cualquier x.



2 **De una función $y = f(x)$ tenemos esta información:**

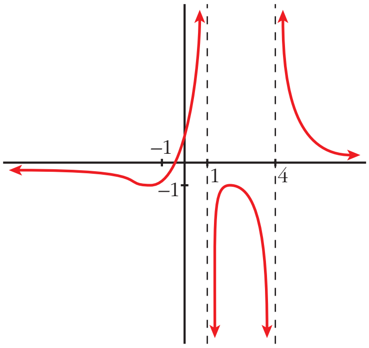
$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}; \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$)

$f'(2) = 0$, $f(2) = -1$; $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -1$

Represéntala.

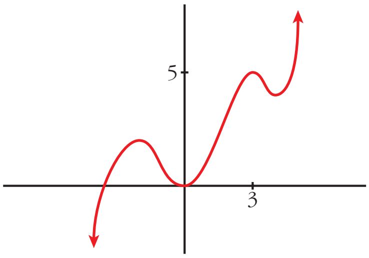


s3 **Dibuja la gráfica de una función de la que se conocen las siguientes propiedades:**

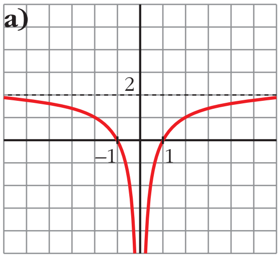
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

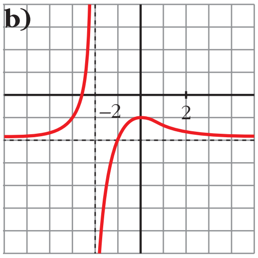
$$f'(x) = 0 \text{ si } x = -2, \; x = 0, \; x = 3, \; x = 4$$

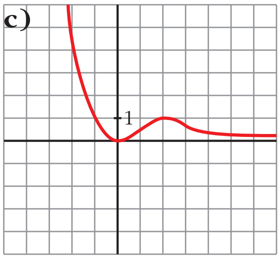
$$f(-2) = 2; \; f(0) = 0; \; f(3) = 5; \; f(4) = 4$$

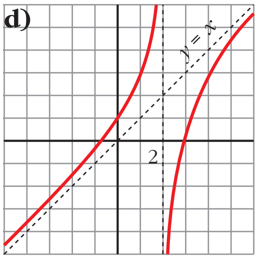


s4 **Describe las siguientes funciones indicando sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**









a) • Asíntotal horizontal: $y = 2$. Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

- $f(x)$ no tiene puntos singulares.
- Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

b) • Asíntotal horizontal: $y = -2$. Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

- Puntos singulares: $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$
- Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal si $x \to +\infty$: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- Puntos singulares:

$f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$

$f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$

- Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

- Asíntota oblicua: $y = x$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- No tiene puntos singulares.
- Creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Funciones polinómicas

5 Estudia y representa las siguientes funciones:

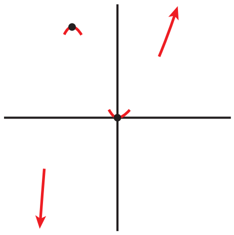
a) $y = x^3 + 3x^2$ **b)** $y = x^3 - 3x^2 + 5$ **c)** $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9}{2}x^2 + 10$

d) $y = \dfrac{5x^4 - x^5}{64}$ **e)** $y = x^5 - 5x^3$ **f)** $y = (x - 1)^3 - 3x$

a) $y = x^3 + 3x^2$

- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

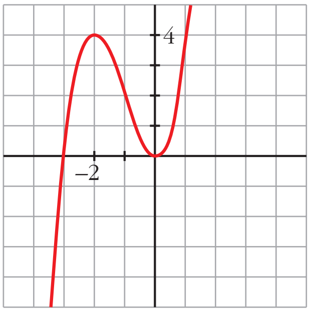


- Puntos singulares:

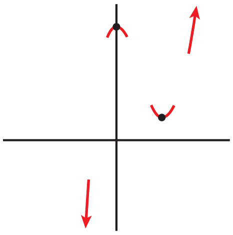
$f'(x) = 3x^2 + 6x$; $3x^2 + 6x = 0 \to x(3x + 6) = 0$

$x = 0$, $f(0) = 0 \to (0, 0)$ es un mínimo.
$x = -2$, $f(-2) = -8 + 3 \cdot 4 = 4 \to (-2, 4)$ es un máximo.

- Representación:



b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$



- Ramas infinitas:

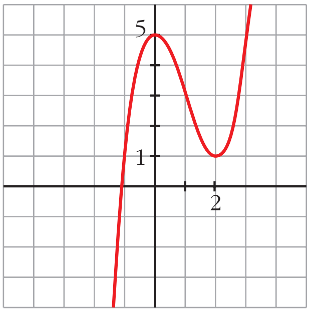
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

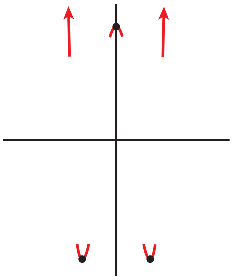
$f(x) = 3x^2 - 6x$; $3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(3x - 6) = 0$

$$\left\langle \begin{array}{l} x = 0,\ f(0) = 5 \rightarrow \text{(0, 5) es un máximo.} \\ x = 2,\ f(2) = 1 \rightarrow \text{(2, 1) es un mínimo.} \end{array} \right.$$

- Representación:



c) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9}{2}x^2 + 10$



- Ramas infinitas:

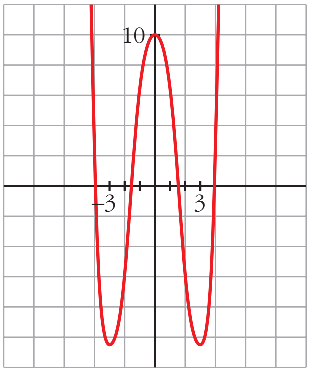
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

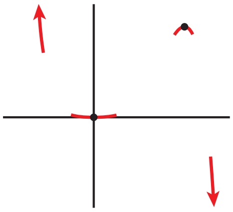
$f'(x) = \dfrac{4x^3}{4} - \dfrac{9}{2} \cdot 2x = x^3 - 9x$; $x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 9) = 0$

$$\left\langle \begin{array}{l} x = 0,\ f(0) = 10 \rightarrow \text{Máximo en (0, 10).} \\ x = 3,\ f(3) = -41/4 \rightarrow \text{Mínimo en (3, –41/4).} \\ x = -3,\ f(-3) = -41/4 \rightarrow \text{Mínimo en (3, –41/4).} \end{array} \right.$$

- Representación:



d) $y = \dfrac{5x^4 - x^5}{64}$



- Ramas infinitas:

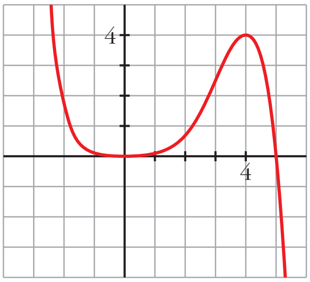
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

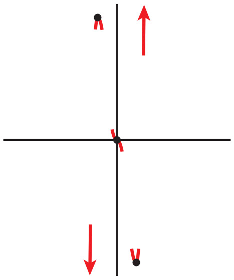
$$f'(x) = \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4); \quad \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^3(20 - 5x) = 0 \;\begin{cases} x = 0,\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; \text{Mínimo en } (0, 0). \\ x = 4,\; f(4) = 4 \;\rightarrow\; \text{Máximo en } (4, 4). \end{cases}$$

- Representación:



e) $y = x^5 - 5x^3$



- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

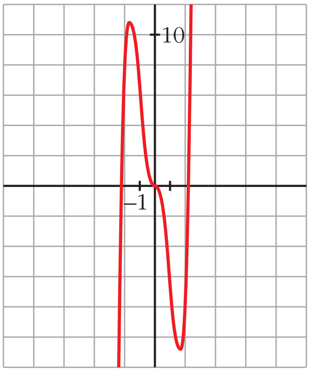
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2; \quad 5x^4 - 15x^2 = 0 \;\rightarrow\; 5x^2(x^2 - 3) = 0$$

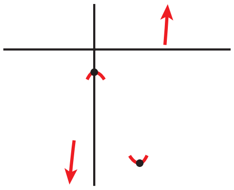
$$\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 0 \\ x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; f(\sqrt{3}) = \sqrt{3^5} - 5\sqrt{3^3} = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \;\rightarrow\; f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3^5} + 5\sqrt{3^3} = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

Tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3},\ 6\sqrt{3}\right)$, un mínimo en $\left(\sqrt{3},\ -6\sqrt{3}\right)$ y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- Representación:



f) $y = (x - 1)^3 - 3x$



- Ramas infinitas:

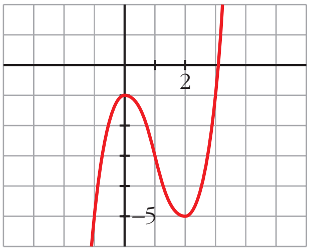
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3(x - 1)^2 - 3; \;\; 3(x - 1)^2 - 3 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\;(x - 1)^2 = 1 \begin{cases} x = 0,\; f(0) = -1 \;\rightarrow\; \text{Máximo en } (0, -1) \\ x = 2,\; f(2) = -5 \;\rightarrow\; \text{Mínimo en } (2, -5) \end{cases}$$

- Representación:

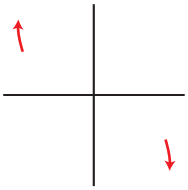


6 **Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Represéntalas gráficamente:**

a) $y = 3 + (2 - x)^3$ **b)** $y = 2 - (x - 3)^4$

c) $y = (x + 1)^6 - 5$ **d)** $y = 3 - (1 - x)^3$

a) $y = 3 + (2 - x)^3$

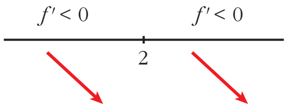


- Ramas infinitas $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$

- Puntos singulares:

$f'(x) = -3(2-x)^2;\ \ -3(2-x)^2 = 0 \ \rightarrow\ x = 2;\ \ f(2) = 3$

Signo de f':



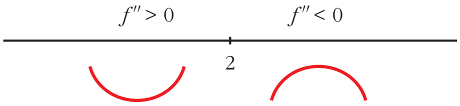
f es decreciente en $\mathbb{R}$.

No tiene máximos ni mínimos.

Puntos de inflexión:

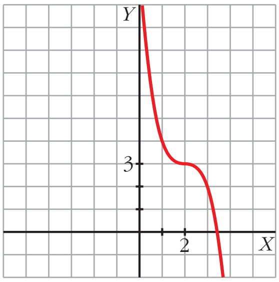
$f''(x) = 6(2-x);\ \ 6(2-x) = 0 \ \rightarrow\ x = 2;\ \ f(2) = 3$

Signo de f'':



El punto (2, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal ($f''(2) = 0$ y $f'(2) = 0$).

- Gráfica:

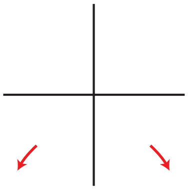


b) $y = 2 - (x-3)^4$

- Ramas infinitas

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

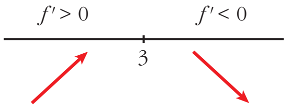
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



- Puntos singulares:

$f'(x) = -4(x-3)^3;\ \ -4(x-3)^3 = 0 \ \rightarrow\ x = 3;\ \ f(3) = 2$

Signo de f':



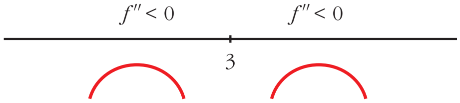
f es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$.

Tiene un máximo en (3, 2).

Puntos de inflexión:

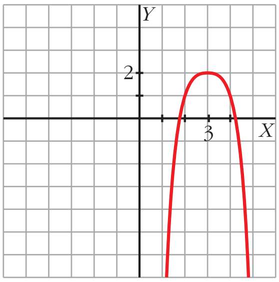
$f''(x) = -12(x-3)^2;\ \ -12(x-3)^2 = 0 \ \rightarrow\ x = 3;\ \ f(3) = 2$

Signo de f'':



No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:

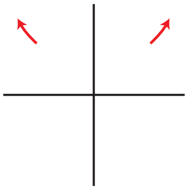


c) $y = (x+1)^6 - 5$

- Ramas infinitas

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

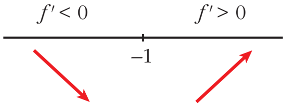
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



- Puntos singulares:

$f'(x) = 6(x+1)^5;\ \ 6(x+1)^5 = 0 \ \rightarrow\ x = -1;\ \ f(-1) = -5$

Signo de f':



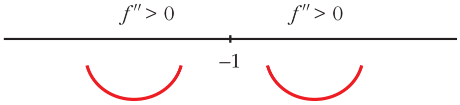
Decreciente en $(-\infty, -1)$. Creciente en $(-1, +\infty)$.

Mínimo en $(-1, -5)$.

Puntos de inflexión:

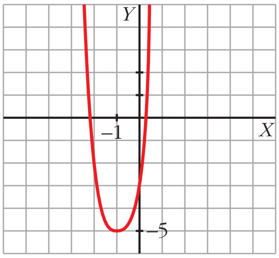
$f''(x) = 30(x+1)^4;\ \ 30(x+1)^4 = 0 \ \rightarrow\ x = -1;\ \ f(-1) = -5$

Signo de f'':



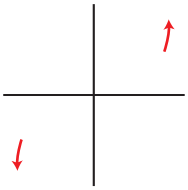
No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:



d) $y = 3 - (1 - x)^3$

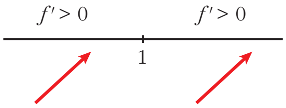
- Ramas infinitas $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$



- Puntos singulares:

  $f'(x) = 3(1 - x)^2; \ \ 3(1 - x)^2 = 0 \ \to \ x = 1; \ f(1) = 3$

  Signo de f':



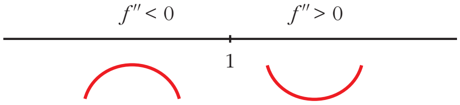
  f es creciente en $\mathbb{R}$.

  No tiene máximos ni mínimos.

  Puntos de inflexión:

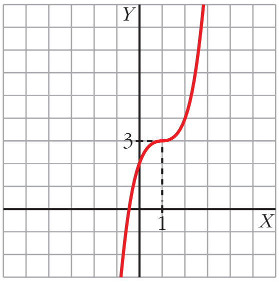
  $f''(x) = -6(1 - x); \ \ -6(1 - x) = 0 \ \to \ x = 1; \ f(1) = 3$

  Signo de f'':



  (1, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal, puesto que $f'(1) = 0$.

- Gráfica:



Funciones racionales

7 En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

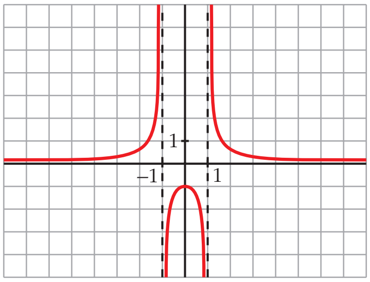
  $y = 0$ es asíntota horizontal.

  (si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

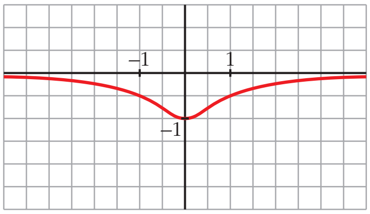
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

  (si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

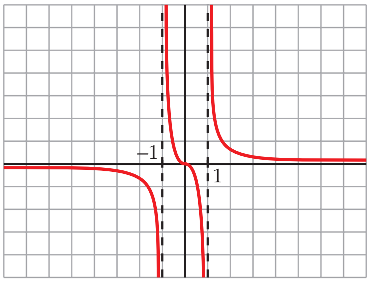
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

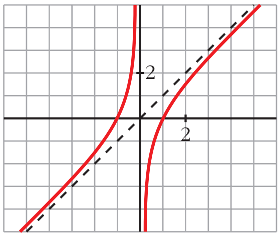
- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

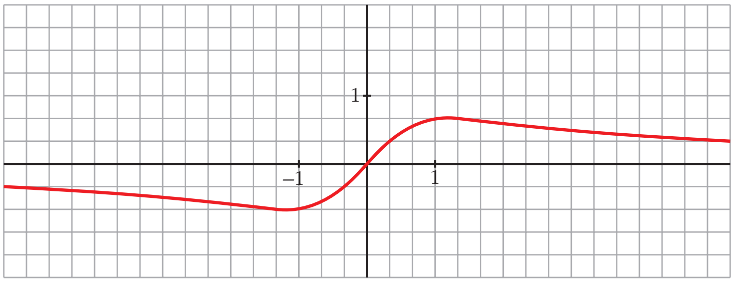
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

- **Dominio:**

$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

$D = \mathbb{R}$

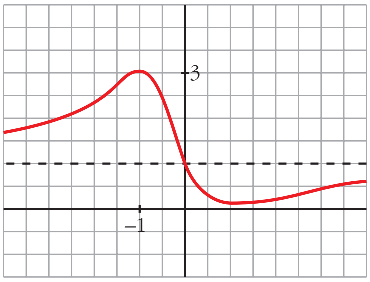
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

- **Gráfica:**



8 **Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, posición y extremos relativos:**

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$ **b)** $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$ **c)** $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ **d)** $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

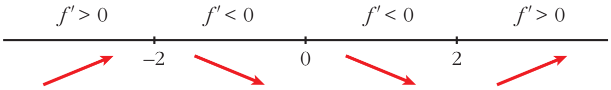
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \frac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \;\to\; x^2 = 4 \left\langle \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Signo de la derivada:



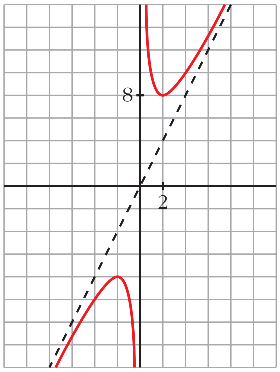
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -8)$.

tiene un mínimo en $(2, 8)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

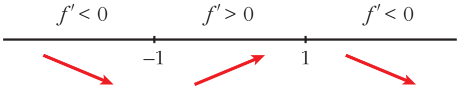
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$

Signo de $f'(x)$:

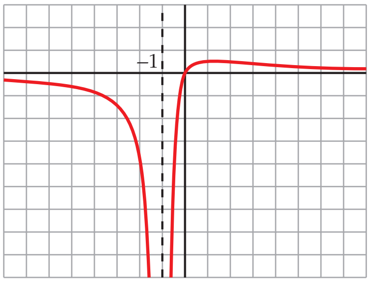


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

es creciente en $(-1, 1)$.

tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

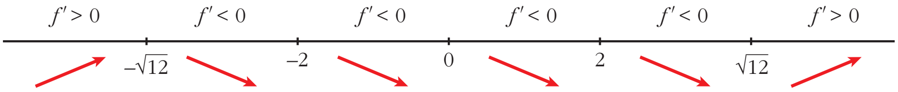
(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(x^2 - 12) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



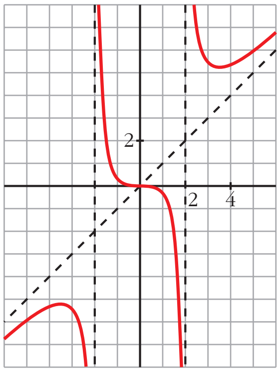
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$.

es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$.

tiene un máximo en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$.

tiene un mínimo en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$.

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 1$)

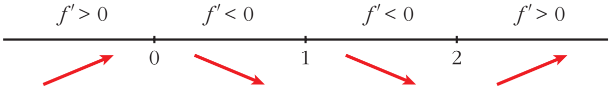
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



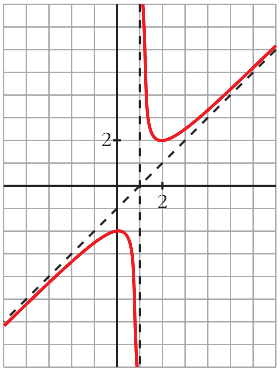
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

tiene un máximo en $(0, -2)$.

tiene un mínimo en $(2, 2)$.

- **Gráfica:**



Funciones "a trozos"

9 Representa esta función:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. ¿Tiene algún punto de inflexión?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$, es una parábola abierta hacia abajo:

  Vértice: $f'(x) = -2x - 2$; $-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$, $f(-1) = 3$

  Cortes con el eje X: $-x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$

  $$\begin{cases} x \approx 0{,}73 \text{ (no vale por ser } 0{,}73 > 0) \\ x \approx -2{,}73 \end{cases}$$

- Si $x \geq 0$, es una parábola abierta hacia arriba:

  Vértice: $f'(x) = 2x - 2$; $2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$, $f(1) = 1$

  Cortes con el eje X: $x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

  No corta al eje X.

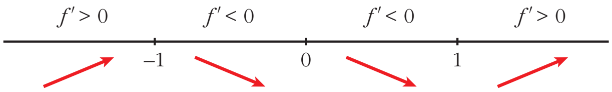
  Corte con el eje Y: $0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow (0, 2)$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  $f'(0^-) = -2 = f'(0^+)$ Es derivable en $x = 0$.

- Signo de $f'(x)$:



Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Decrece en $(-1, 1)$.

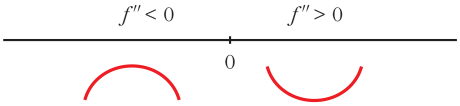
Tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, 1)$.

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } \ x < 0 \\ 2 & \text{si } \ x > 0 \end{cases}$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$. No existe $f''(0)$.

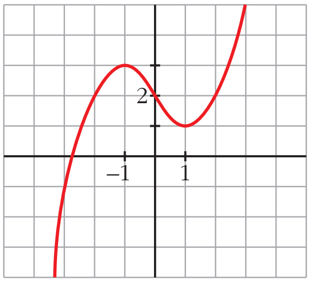
Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

En $(0, 2)$ tiene un punto de inflexión.

- Representación:



Página 332

10 **Representa la siguiente función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } \ x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}}$$

Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } \ x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

- Continuidad:

  Si $x \neq 0$, f es continua por estar definida por polinomios.

  Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} x^3 - 3x + 1 = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1 \\ f(0) = (0-1)^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ Como } \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0),\ f \text{ es continua en } x = 0.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

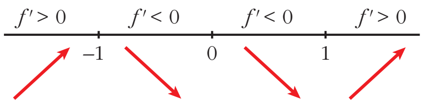
$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2(x-1) & \text{si } x > 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = -2 \end{array}\right\}$$

  Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, f no es derivable en $x = 0$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \ \ \text{(no vale porque tiene que ser } x < 0) \\ x = -1,\ f(-1) = 3 \end{array}\right. \\ 2(x-1) = 0 \ \ \to \ \ x = 1,\ f(1) = 0 \end{array}\right.$$

  Signo de f':



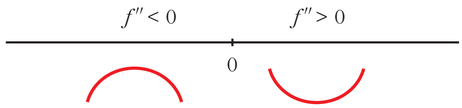
  Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-1, 1)$.
  Máximo en $(-1, 3)$. Mínimo en $(1, 0)$.

- Curvatura:

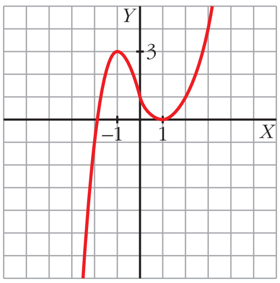
$$f''(x) = \left\{\begin{array}{ll} 6x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f''(0^-) = 0 \\ f''(0^+) = 2 \end{array}\right\}$$

  $f''(0^-) \neq f''(0^+)$. Por tanto, no existe $f''(0)$.

  Signo de f'':



  Hay un punto de inflexión en $(0, 1)$.



PARA RESOLVER

11 **Representa las siguientes funciones, estudiando:**

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

— Crecimiento y extremos relativos.

a) $y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$

b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

d) $y = \frac{x^2}{9 - x^2}$

e) $y = \frac{x^2 + 4}{x}$

f) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

g) $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

h) $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$

i) $y = \frac{x^3}{x + 2}$

j) $y = \frac{(x-2)^2}{x-1}$

a) $y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$$\text{lím}_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \text{lím}_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \text{lím}_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \text{lím}_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \; x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

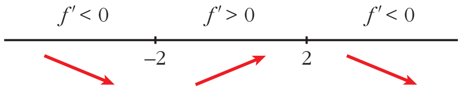
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; -4x + 16 = 0 \;\to\; x = 4$

Signo de $f'(x)$:

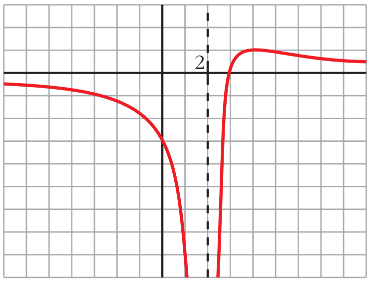


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$.

es creciente en $(2, 4)$.

tiene un máximo en $(4, 1)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

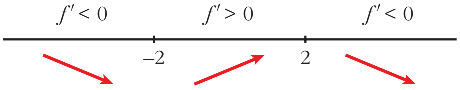
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x - 2 - 2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$

Signo de $f'(x)$:

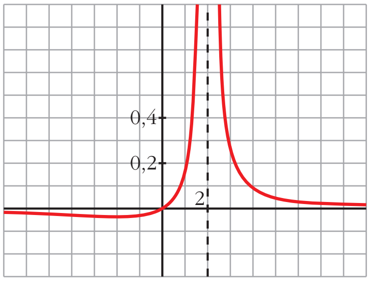


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es creciente en $(-2, 2)$.

tiene un mínimo en $\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = x - 2 - \dfrac{1}{x-2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 2$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

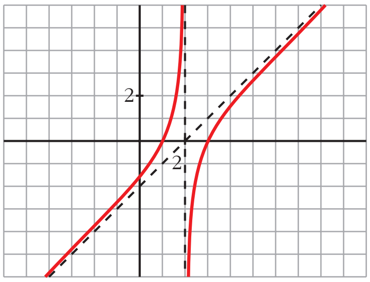
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad (x-2)^2 + 1 = 0 \quad \to$ no tiene solución

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \quad \to \quad f(x)$ es creciente en todo su dominio.

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -3 \text{ es asíntota vertical.}$$

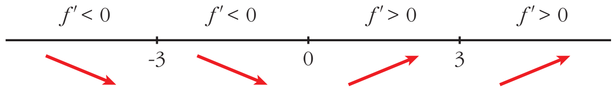
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9-x^2)^2} = \frac{18x}{(9-x^2)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 18x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

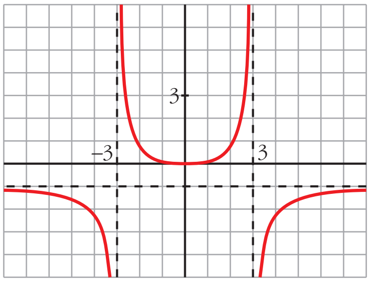


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

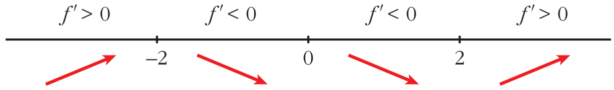
(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:



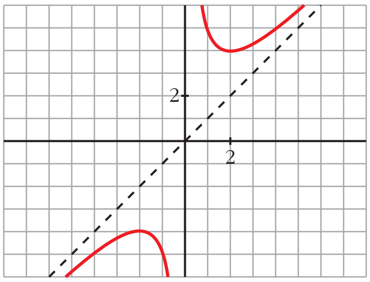
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -4)$.

tiene un mínimo en $(2, 4)$.

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

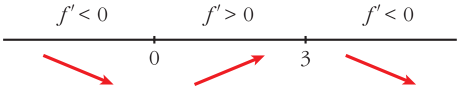
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

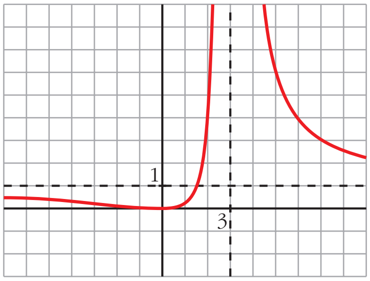


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

es creciente en $(0, 3)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $y = 2x$ es asíntota oblicua.

  (Si $x \to -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

  $$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 + 1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

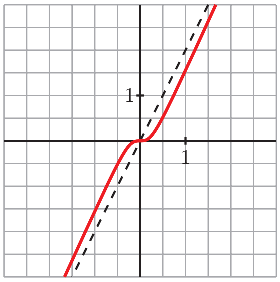
  $f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x^2 + 3) = 0 \quad \to \quad x = 0$

  Signo de $f'(x)$:

  $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

  $f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

- **Gráfica:**



h) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3(x^2-8)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^3(x^2-8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↘	$-\sqrt{8}$	↗	-2	↗	0	↘	2	↘	$\sqrt{8}$	↗

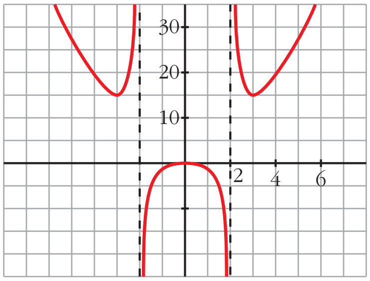
$f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{8}\right) \cup (0, 2) \cup \left(2, \sqrt{8}\right)$.

es creciente en $\left(-\sqrt{8}, -2\right) \cup (-2, 0) \cup \left(\sqrt{8}, +\infty\right)$.

tiene un mínimo en $\left(-\sqrt{8}, 16\right)$ y otro en $\left(\sqrt{8}, 16\right)$.

tiene un máximo en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



i) $y = \dfrac{x^3}{x + 2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

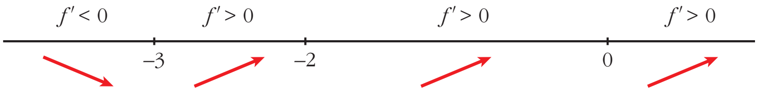
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x + 2) - x^3}{(x + 2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x + 2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x + 3) = 0 \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:



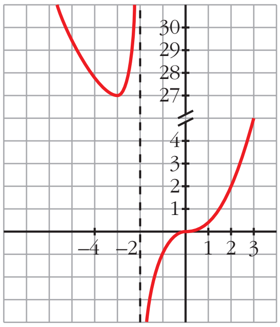
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$.

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(-3, 27)$.

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



j) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

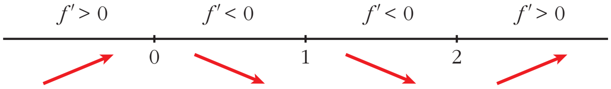
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 3$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = 2 \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:



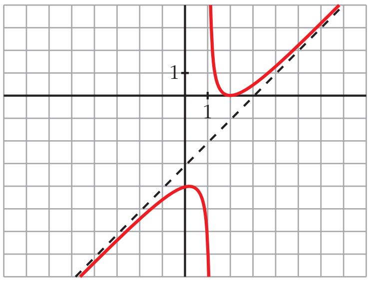
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

tiene un máximo en $(0, -4)$.

tiene un mínimo en $(2, 0)$.

- **Gráfica:**



s12 **a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x}$.**

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \to \quad x = 0$ es asíntota vertical.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad \to \quad y = x$ es asíntota oblicua.

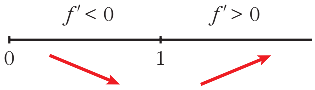
(Si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \quad \text{(no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$$

($x = -1$ no vale, pues $f(x)$ está definida solamente para $x > 0$).

Signo de $f'(x)$:



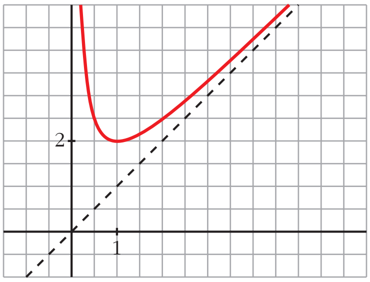
$f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$.

es creciente en $(1, +\infty)$.

tiene un mínimo (local y global) en $(1, 2)$.

no tiene un máximo.

c)



s13 Dada la función $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, se pide:

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Dibuja la gráfica de f.

a) • **Dominio:** $\mathbb{R}$ (porque $x^2 + 1 > 0$ para todo x).

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales porque el denominador no se anula para ningún valor de x.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

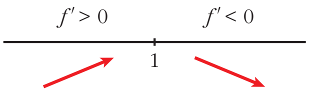
$y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -1)$.

$y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 1)$.

b) $$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; 1 - x = 0 \;\to\; x = 1$

Signo de $f'(x)$:

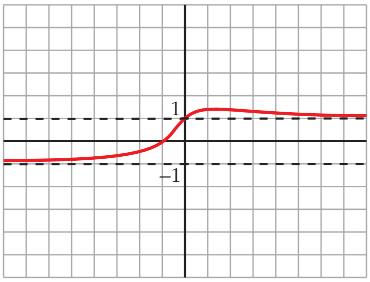


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

es decreciente en $(1, +\infty)$.

tiene un máximo en $(1, \sqrt{2})$.

c)



s14 **Representa gráficamente la función:**

$$\boldsymbol{p(x) = x^4 + (4/3)x^3 + 2x^2 - 2}$$

¿Cuántas raíces reales tiene este polinomio $p(x)$?

$$p(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$$

- $\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$
- $p'(x) = 4x^3 + 4x^2 + 4x = 4x(x^2 + x + 1)$

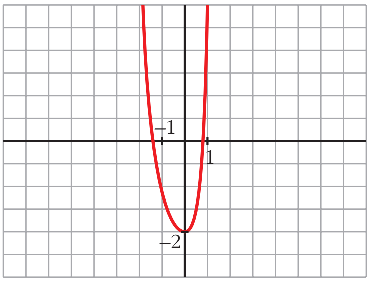
  $p'(x) = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\;$ Hay un punto singular en $(0, -2)$.

- $p''(x) = 12x^2 + 8x + 4 = 4(3x^2 + 2x + 1)$

  $p''(x) = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} \quad \to$ no tiene solución.

  $p(x)$ no tiene puntos de inflexión.

- **Gráfica:**



- $f(x)$ tiene dos raíces reales.

s15 **Dadas las siguientes funciones, halla sus asíntotas, estudia el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos. Dibuja su gráfica:**

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1}$

c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -\sqrt{3} \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = \sqrt{3} \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 3} = 0 \quad \to \quad y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \to -\infty$$
$$(f(x) > 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

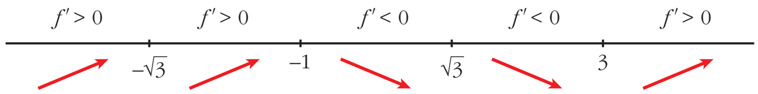
- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2-3) - e^x \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$\begin{cases} x = 3, \; f(3) = e^3/6 \\ x = -1, \; f(-1) = -1/2e \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

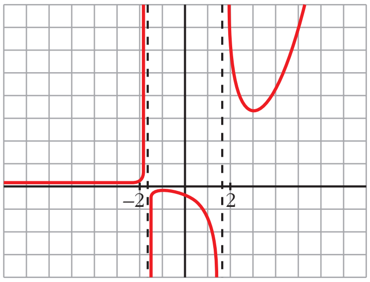


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -1) \cup (3, +\infty)$.

es decreciente en $(-1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$.

tiene un máximo en $\left(-1, \dfrac{-1}{2e}\right)$. Tiene un mínimo en $\left(3, \dfrac{e^3}{6}\right)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3}{4x^2+1} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{(1/4)x}{4x^2+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = \dfrac{1}{4}x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > \dfrac{1}{4}x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < \dfrac{1}{4}x$)

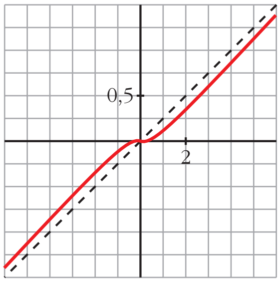
- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2+1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2+1)^2} = \frac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(4x^2+3) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 0$ → $f(x)$ es creciente (tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$).

- **Gráfica:**



c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

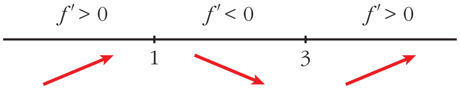
(Si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; (x-1)^3 = 8 \;\to\; x - 1 = 2 \;\to\; x = 3$$

Signo de $f'(x)$:

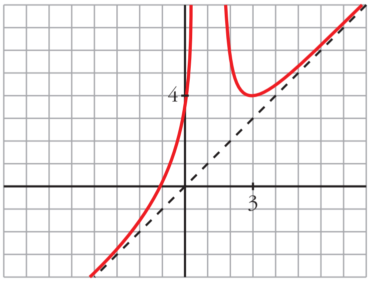


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

es decreciente en $(1, 3)$.

tiene un mínimo en $(3, 4)$.

- **Gráfica:**



d) $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

- **Dominio:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} + x - 2\right] = +\infty$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + x - 2}{-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} + x - 2 - 2x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - x - 2\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)\right]\left[\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)\right]}{\left[\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)\right]} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x - 8}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$y = -2x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$(f(x) < -2x - 2)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - x - 2\right] = -2$$

$y = -2$ es asíntota horizontal.

$(f(x) < -2)$

- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

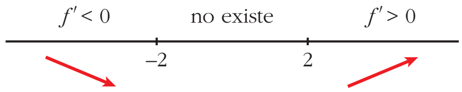
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$.

$f'(x) = 0 \rightarrow x - \sqrt{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = \sqrt{x^2 - 4} \rightarrow x = x^2 - 4 \rightarrow$

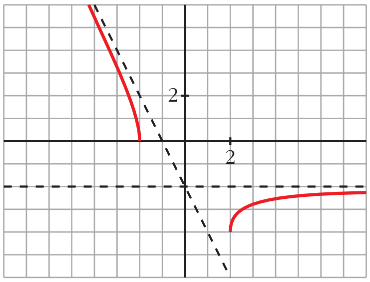
$\rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$ no hay puntos singulares

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

- **Gráfica:**



16 **Estudia los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **c)** $y = \text{sen } x + \cos x$ **para** $0 \le x \le 2\pi$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{senh } x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x + e^{-x} = 0 \;\rightarrow\;$ no tiene solución $\rightarrow$

  $\rightarrow$ no hay máximos ni mínimos

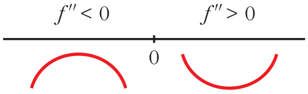
  $f'(x) > 0$ para todo x $\rightarrow$ $f(x)$ es creciente

- $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; e^x - \dfrac{1}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; e^{2x} - 1 = 0 \;\rightarrow$

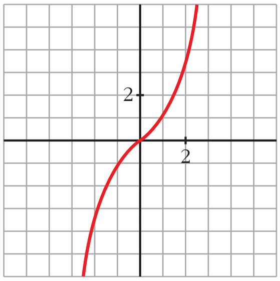
  $\rightarrow\; e^{2x} = 1 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

  Signo de $f''(x)$:



  Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**

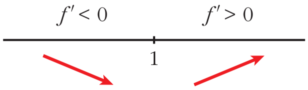


b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\ x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

  Signo de $f'(x)$:

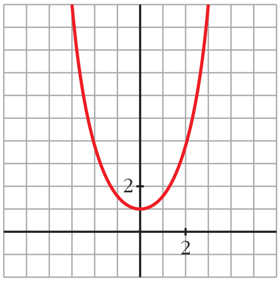
  

  Hay un mínimo en (0, 1).

- $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \;\rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$ no hay puntos de inflexión

- **Gráfica:**

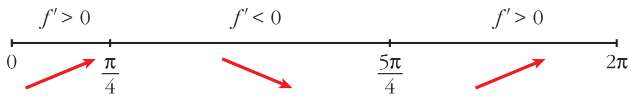
  

c) $y = sen\ x + cos\ x$ para $0 \le x \le 2\pi$

- $f'(x) = cos\ x - sen\ x$

  $$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; cos\ x = sen\ x \;\rightarrow\; tg\ x = 1 \;<\; \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{array}$$

  Signo de $f'(x)$:

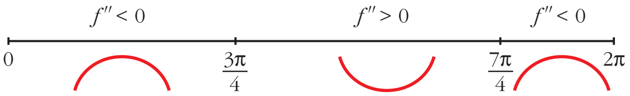
  

  Hay un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- $f''(x) = -sen\ x - cos\ x$

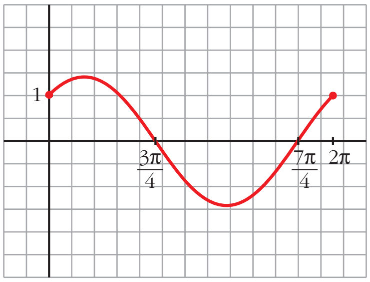
  $$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\ x = -cos\ x \;\rightarrow\; tg\ x = -1 \;<\; \begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{array}$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$, y otro en $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$.

- **Gráfica:**



17 **Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de las siguientes funciones y, con esa información, trata de encontrar su gráfica entre las siguientes:**

a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

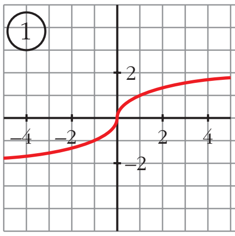
b) $y = x e^x$

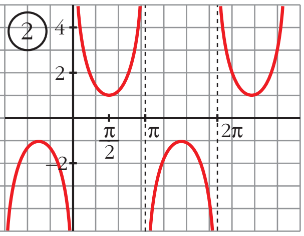
c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

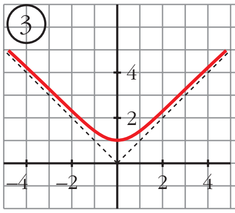
d) $y = \sqrt[3]{x}$

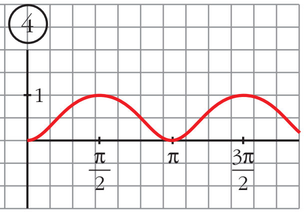
e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

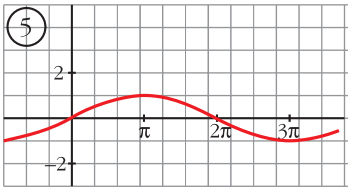
f) $y = sen^2\ x$

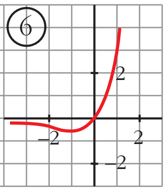












a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

- **Dominio:**

$sen\ x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

$D = \mathbb{R} - \{\pi k\}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- **Asíntotas:**

  $x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

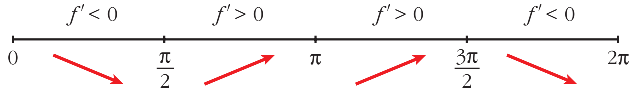
  No hay más asíntotas.

- **Extremos:**

  $$f'(x) = \frac{-\cos x}{sen^2 x}$$

  $$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ \cos x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{cases} \Bigg\} \ (k \in \mathbb{Z})$$

  Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



  $f(x)$ es periódica de período 2π.

  $f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

  es creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

  tiene un mínimo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

  tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

- **Gráfica** → ②

b) $y = xe^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

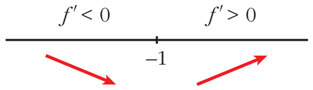
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \ \rightarrow\ \text{Rama parabólica}$$

- **Extremos:**

  $$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

  $$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ 1 + x = 0 \ \rightarrow\ x = -1$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$.

es creciente en $(-1, +\infty)$.

tiene un mínimo en $\left(-1, \dfrac{-1}{e}\right)$.

- **Gráfica** → ⑥

c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

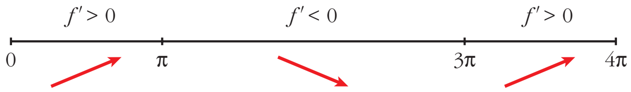
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ cos\ \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ cos\ \frac{x}{2} = 0 \ \rightarrow \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \ \rightarrow \ x = \pi + 2\pi k$$

$f(x)$ es periódica de período 4π.

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$.

es decreciente en $(\pi, 3\pi)$.

tiene un máximo en $(\pi, 1)$.

tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$.

- **Gráfica** → ⑤

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

- **Extremos:**

  $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \to \quad f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

  $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

  $f(x)$ es creciente.

- **Gráfica** → ①

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Simetría:**

  $f(-x) = f(x) \quad \to \quad f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 1} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

  $y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

  Por simetría:

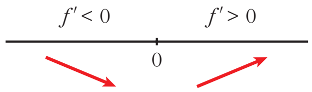
  $y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

- **Extremos:**

  $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

  Signo de $f'(x)$:



  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

  es creciente en $(0, +\infty)$.

  tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- **Gráfica** → ③

f) $y = sen^2\, x$

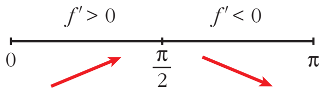
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$f'(x) = 2\, sen\, x \cos x = sen\, 2x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\, 2x = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 + \pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2} k,\;\; k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$ es periódica de período π.

Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$.

- **Gráfica** → ④

Página 333

18 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$ **b)** $y = \dfrac{ln\, x}{x}$

c) $y = x\, ln\, x$ **d)** $y = (x - 1)\, e^x$

e) $y = e^{-x^2}$ **f)** $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \dfrac{x^3}{ln\, x}$ **h)** $y = ln(x^2 - 1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$ (ya que $e^x \neq 0$ para todo x).
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \;\rightarrow\;$ Rama parabólica

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

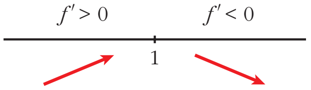
(1) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos la regla de L'Hôpital.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 - x = 0 \quad \to \quad x = 1$

Signo de $f'(x)$:



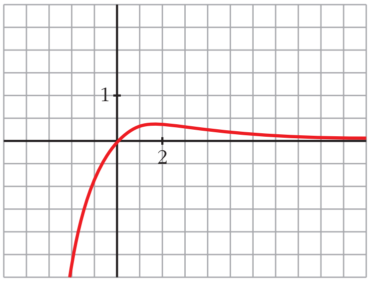
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

es decreciente en $(1, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \frac{\ln x}{x}$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 0$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

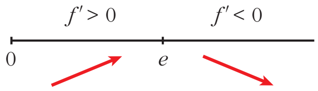
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \ln x = 1 \quad \rightarrow \quad x = e$$

Signo de $f'(x)$:



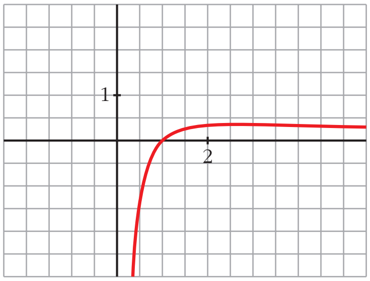
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$.

es decreciente en $(e, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

No tiene asíntotas verticales.

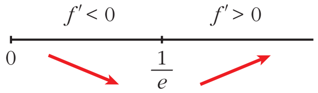
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \ln x = -1 \quad \rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:

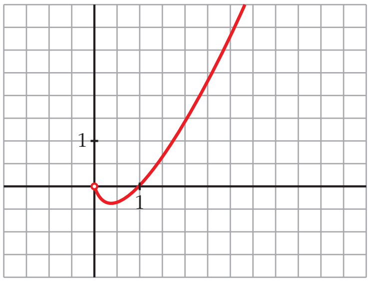


$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

es creciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

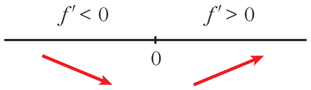
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

es creciente en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, -1)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- **Gráfica:**

e) $y = e^{-x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

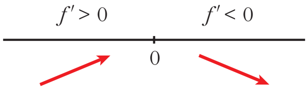
$y = 0$ es asíntota horizontal $(f(x) > 0$ para todo $x)$.

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

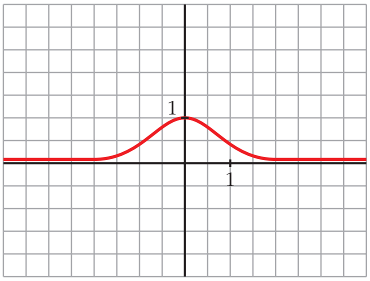


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

es decreciente en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- **Gráfica:**



f) $y = x^2 e^{-x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

  (1) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos la regla de L'Hôpital.

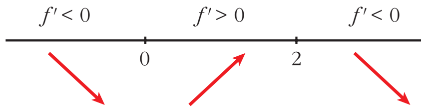
- **Puntos singulares:**

  $$y = \frac{x^2}{e^x}$$

  $$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^x} = \frac{e^x(2x - x^2)}{e^x} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

  $$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - x^2 = 0 \quad \to \quad x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

  Signo de $f'(x)$:



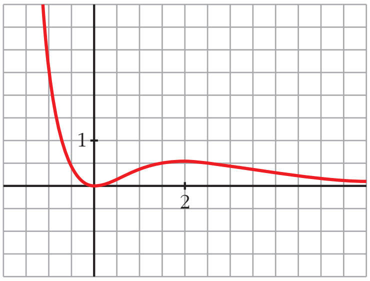
  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

  es creciente en $(0, 2)$.

  tiene un mínimo en $(0, 0)$.

  tiene un máximo en $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$.

- **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{x^3}{\ln x}$

- **Dominio:**

  $\ln x = 0 \ \rightarrow\ x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

  $Dom = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

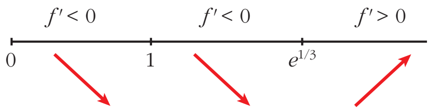
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \ \rightarrow \ \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^3 \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(3\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

  $$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x^2(3\ln x - 1) = 0 \ \begin{cases} x = 0 \ \text{(no vale)} \\ \ln x = 1/3 \ \rightarrow \ x = e^{1/3} \end{cases}$$

  Signo de $f'(x)$:

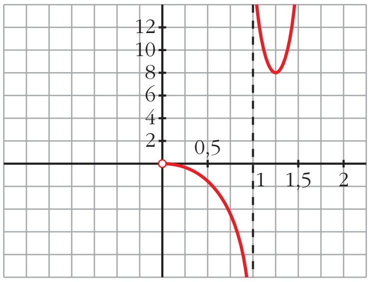


  $f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$.

  es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$.

  tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$.

- **Gráfica:**



h) $y = ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

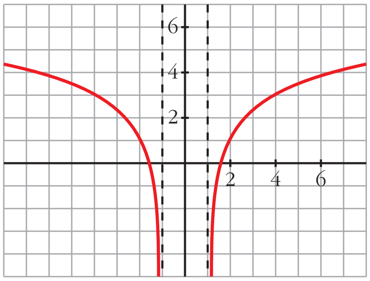
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje *X*:**

$$ln(x^2 - 1) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 1 \quad \to \quad x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}, 0\right)$

- **Gráfica:**



19 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

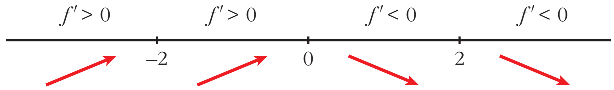
$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; & \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; & \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(4 - x^2)^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = -2, \text{ ni en } x = 2.$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

  Signo de $f'(x)$:



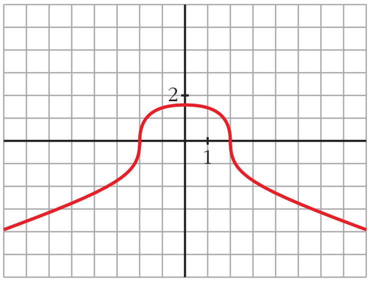
  $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

  es decreciente en $(0, +\infty)$.

  tiene un máximo en $\left(0, \sqrt[3]{4}\right)$.

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

- **Dominio:** $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + x} - x][\sqrt{x^2 + x} + x]}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

$y = -x + \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $\left(f(x) < -x + \frac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - x} - x][\sqrt{x^2 - x} + x]}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-1}{2}$$

$y = x - \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $\left(f(x) < x - \frac{1}{2}\right)$.

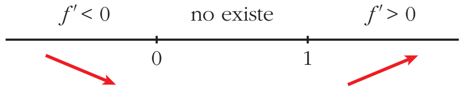
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - 1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{1}{2}$$

No tiene puntos singulares $\left(\text{en } x = \frac{1}{2} \text{ no está definida } f(x)\right)$.

Signo de $f'(x)$:

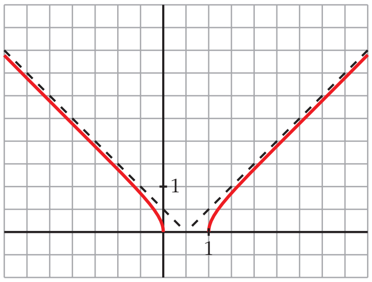


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$.

es creciente en $[1, +\infty)$.

- Pasa por $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

- **Dominio:**

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \;\rightarrow\; \text{no tiene solución}$$

$f(x) > 0$ para todo x.

$D = \mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} =$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

$y = -x + 2$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ $(f(x) > -x + 2)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} =$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

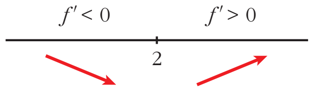
$y = x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $\left(f(x) > x - 2\right)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

$$f'(x) = 0 \;\; \to \;\; x - 2 = 0 \;\; \to \;\; x = 2$$

Signo de $f'(x)$:

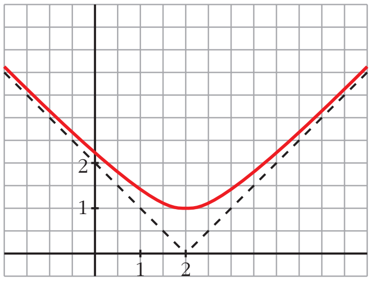


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2)$.

es creciente en $(2, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(2, 1)$.

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetrías:** $f(-x) = f(x)$ → $f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \quad \to \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \quad \to \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2 - 1)}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^4 + x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x(x^2 - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x^3 - x} = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

Como $f(x)$ es par, la recta $y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

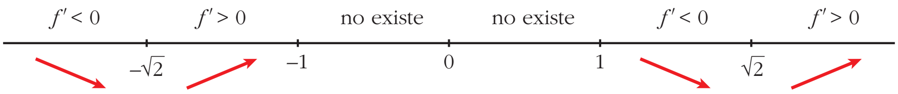
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - 1} - x^2 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{(x^2 - 1)} = \frac{2x(x^2 - 1) - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \frac{2x^3 - 2x - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} =$$

$$= \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2 - 2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \ \ \text{(no vale)} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$

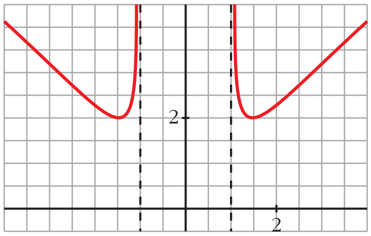


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$.

es creciente en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(-\sqrt{2}, 2)$ y otro en $(\sqrt{2}, 2)$.

- **Gráfica:**



20 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

a) $y = x + |x + 2|$

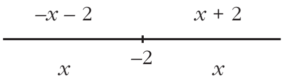
b) $y = 2x - |x - 3|$

c) $y = |x| + |x - 3|$

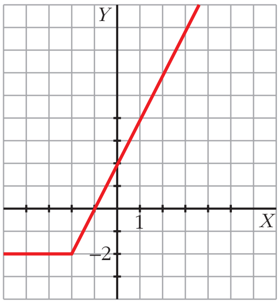
d) $y = x|x - 1|$

a) $y = x + |x + 2|$

Como $|x + 2| = 0 \Leftrightarrow x = -2$, estudiamos f a la izquierda y a la derecha de -2 para definirla por intervalos.

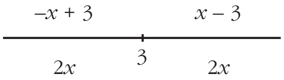


$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$



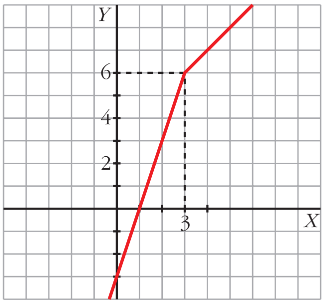
b) $y = 2x - |x - 3|$

Estudiamos la función para valores menores y mayores que 3.



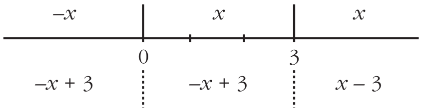
Restamos: $\begin{cases} 2x - (-x + 3) = 3x - 3 \\ 2x - (x - 3) = x + 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x + 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$



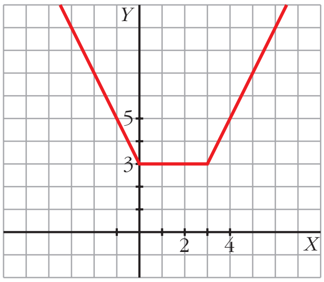
c) $y = |x| + |x - 3|$

Como $|x| = 0$ en $x = 0$ y $|x - 3| = 0$ en $x = 3$, estudiamos f a la izquierda y a la derecha de esos puntos.



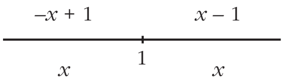
Sumamos: $\begin{cases} -x + (-x + 3) = -2x + 3 \\ x + (-x + 3) = 3 \\ x + \ (x - 3) = 2x - 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



d) $y = x\,|x - 1|$

Estudiamos f a la derecha y a la izquierda de $x = 1$.



Multiplicamos: $\begin{cases} x(-x + 1) = -x^2 + x \\ x(x - 1) = x^2 - x \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- $y = -x^2 + x$ es una parábola abierta hacia abajo:

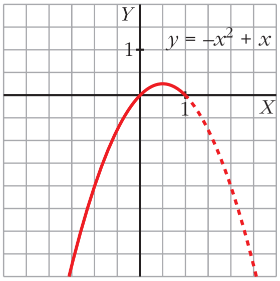
  Vértice: $-2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}, \ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

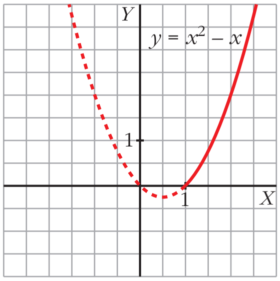
  Cortes con OX: $-x^2 + x = 0 \rightarrow x(-x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 1$

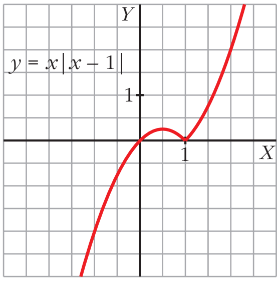
- $y = x^2 - x$ es una parábola abierta hacia arriba:

  Vértice: $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ (no vale, ya que debe ser $x \geq 1$)

  Cortes con OX: $x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 < \begin{matrix} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = 1 \end{matrix}$







21 **Representa gráficamente:**

a) $y = \frac{1}{|x| - 2}$

b) $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$

a) $y = \frac{1}{|x| - 2}$

Definimos la función por intervalos: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{-x - 2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Si $x < 0$, $y = \frac{1}{-x - 2} = \frac{-1}{x + 2}$:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$
- Asíntota vertical:

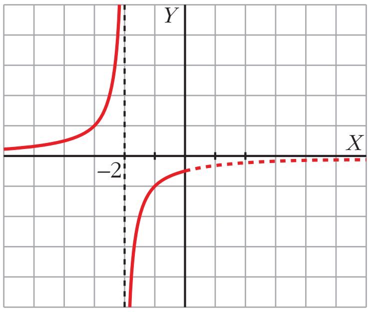
  $$\lim_{x \to -2} f(x) < \begin{matrix} \text{Si } x < -2, \ f(x) \rightarrow +\infty \\ \text{Si } x > -2, \ f(x) \rightarrow -\infty \end{matrix}$$

  $x = -2$ es una asíntota vertical.

- Asíntota horizontal:

  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x+2} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(f(x) > 0)$.



Si $x \geq 0$, $y = \dfrac{1}{x-2}$:

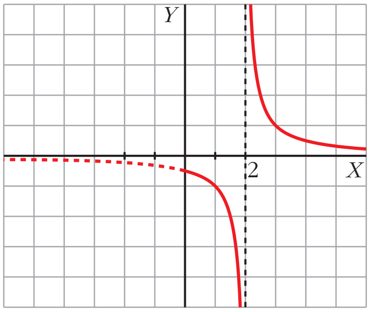
- Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$
- Asíntota vertical:

  $$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < 2, & f(x) \to -\infty \\ \text{Si } x > 2, & f(x) \to +\infty \end{cases}$$

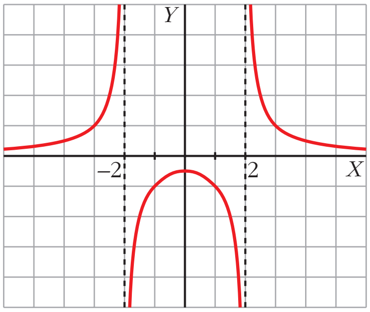
- Asíntota horizontal:

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ $(f(x) > 0)$



La gráfica de $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$ es:



b) $y = \dfrac{|2x|}{x^2 + 1}$

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{x^2 + 1} & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, $y = \dfrac{-2x}{x^2 + 1}$:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x^2 + 1} = 0$$

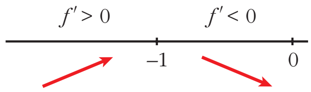
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ ($y > 0$).

- Puntos singulares:

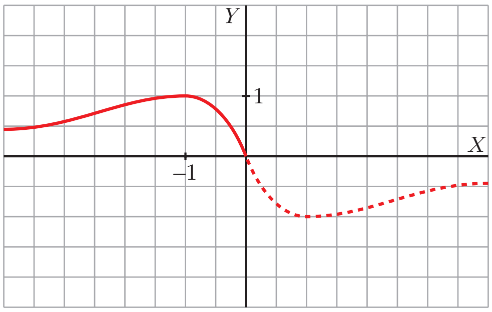
$$f'(x) = \frac{-2(x^2 + 1) + 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \begin{cases} x = 1 \ \text{(no vale, } 1 > 0) \\ x = -1, \ f(-1) = 1 \end{cases}$$

Signo de f':



Máximo en (–1, 1).



Si $x \geq 0,\ y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

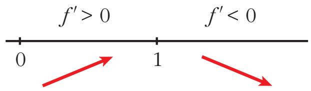
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ $(y > 0)$.

- Puntos singulares:

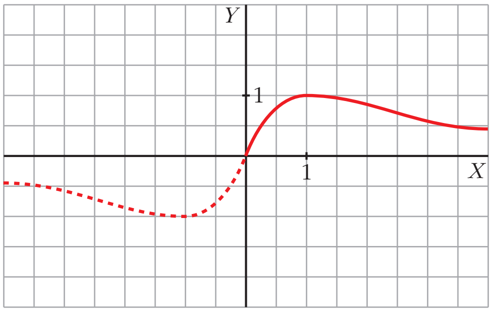
$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \ \ (\text{no vale}, -1 < 0) \\ x = 1,\ f(1) = 1 \end{cases}$$

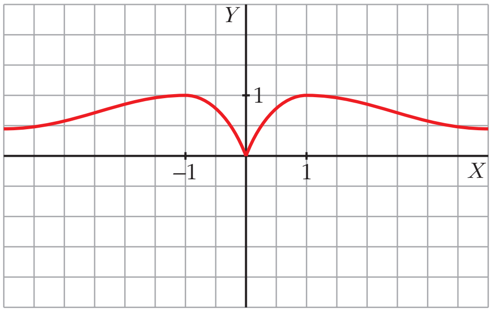
Signo de f':



Máximo en (1, 1).



La gráfica de $y = \dfrac{|2x|}{x^2 + 1}$ es:



s22 **Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva de ecuación $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$.**

En el punto $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de la tangente.

b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje OX.

a) Pendiente de la recta tangente en $x = 2$:

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1-x^2)^2}$$

$$m = f'(2) = \frac{10}{9}$$

La ecuación de la recta tangente en P es:

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{10}{9}(x-2) \;\rightarrow\; y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

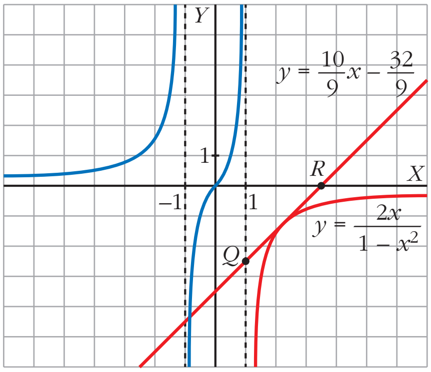
b) La asíntota vertical más próxima a P es $x = 1$. Tenemos que hallar el punto de intersección de $x = 1$ con la recta tangente anterior:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \text{ El punto es } Q\left(1, \frac{-22}{9}\right).$$

c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{10}{9}x = \dfrac{32}{9} \;\rightarrow\; x = \dfrac{32}{10} = \dfrac{16}{5} \\ y = 0 \end{array}\right\} \text{ El punto es } R\left(\frac{16}{5}, 0\right).$$

Esta gráfica muestra la curva $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$, la recta tangente $y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9}$ y los puntos $Q\left(1, \dfrac{-22}{9}\right)$ y $R\left(\dfrac{16}{5}, 0\right)$.



s23 **Considera la función $f(x) = x^2|x-3|$:**

a) Halla los puntos donde f no es derivable.

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Represéntala gráficamente.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2(-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Si $x \neq 3$, tenemos que $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \ \big(\text{Punto } (3, 0)\big). \end{array}$$

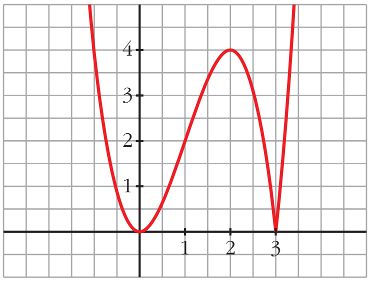
$$\text{b) } f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x = 0 \text{ si } x < 3 \\ 3x(-x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 4) \end{cases} \\ 3x^2 - 6x = 0 \text{ si } x > 3 \rightarrow \text{ninguno} \end{cases}$$

Como $f(x) \geq 0$ para todo x, tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$.

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



s24 **La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-k}$. Halla el valor de k y representa la función así obtenida.**

- **Hallamos k:**

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \quad \rightarrow \quad k = 3$$

También podríamos efectuar la división:

$$\begin{array}{rl|l}
2x^2 & +\ 1 & \ x - k \\ \cline{3-3}
-2x^2 + 2kx & & \ 2x + 2k \\ \cline{1-1}
& 2kx + 1 & \\
& -2kx + \quad 2k^2 & \\ \cline{2-2}
& 1 + 2k^2 &
\end{array}$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + 2k$.

$2x + 2k = 2x + 6 \ \rightarrow \ 2k = 6 \ \rightarrow \ k = 3$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

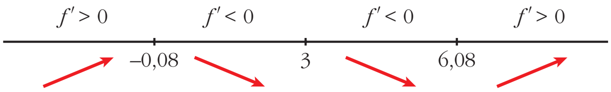
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x - 3) - (2x^2 + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 12x - 1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \left\langle \begin{array}{l} x = 6{,}08 \\ x = -0{,}08 \end{array}\right.$$

Signo de $f'(x)$:



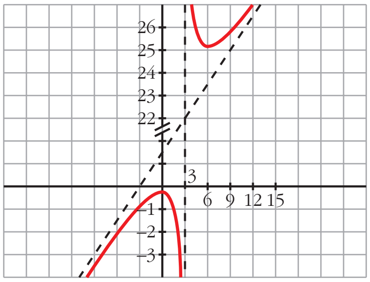
$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$.

es decreciente en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$.

tiene un máximo en $(-0{,}08; -0{,}33)$.

tiene un mínimo en $(6{,}08; 24{,}32)$.

- **Gráfica:**



s25 Considera la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} sen\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ x^2 - 2x & \text{si } x \in [0, 3] \end{cases}}$$

Determina los puntos de corte con los ejes y sus extremos relativos. Dibuja su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} sen\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ x^2 - 2x & \text{si } x \in [0, 3] \end{cases}$$

- Cortes con los ejes: $x = 0,\ f(0) = 0$

$y = 0$:

$sen\ x = 0$: $x = -2\pi \rightarrow (-2\pi, 0)$; $x = -\pi \rightarrow (-\pi, 0)$

$x^2 - 2x = 0$: $x = 0 \rightarrow (0, 0)$; $x = 2 \rightarrow (2, 0)$

- Extremos relativos:

$$f'(x) = \begin{cases} cos\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ 2x - 2 & \text{si } x \in (0, 3] \end{cases}$$

$f'(0^-) = cos\ 0 = 1$

$f'(0^+) = 2 \cdot 0 - 2 = 0$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \rightarrow$ No existe $f'(0)$.

$$f'(x) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2},\ f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \\ x = -\dfrac{3\pi}{2},\ f\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \\ 2x - 2 = 0 \ \rightarrow \ x = 1,\ f(1) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Comprobamos si son máximos o mínimos en $f''(x)$:

$$f''(x) = \begin{cases} -\mathit{sen}\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ 2 & \text{si } x \in (0, 3] \end{cases}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$$

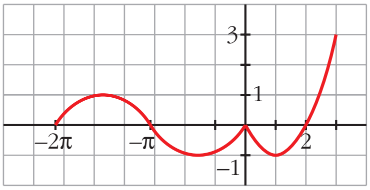
$$f''\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0$$

$$f''(1) = 2 > 0$$

Máximo en $\left(-\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$.

Mínimos en $\left(-\dfrac{\pi}{2}, -1\right)$ y $(1, -1)$.

- Representación:



s26 **Considera la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + 1} & \textbf{si } x < 0 \\ -x + 1 & \textbf{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

En el intervalo (–∞, 0], estudia la existencia de puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, la existencia de puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x \in (-\infty, 0)$, $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

  Si $x = 0$, $y = -x + 1 = 1$

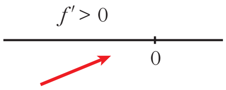
Cortes con los ejes: $x = 0, \ y = 1 \ \to \ (0, 1)$

$$y = 0 \ \to \ \frac{1}{x^2+1} = 0 \ \ \text{No tiene solución. No corta a } \ Y.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}; \ \ \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \ \to \ -2x = 0 \ \to \ x = 0, \ f(0) = 1$$

Signo de $f'(x)$:

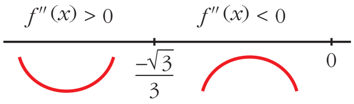


La función es creciente.

- Puntos de inflexión:

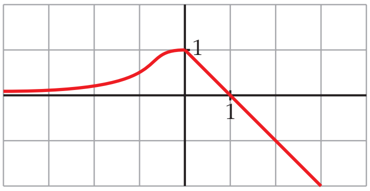
$$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}; \ \ \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \ \to \ x^2 = \frac{1}{3} \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \ \ \text{(no vale)} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right) \simeq (-0{,}58; 0{,}75)$

- Representación:



27 **Dada la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2, -6)$ y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para esos valores de a y b, representa la función.**

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}; \ \ f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$$

- Pasa por $(-2, -6)$, $f(-2) = -6 \ \to \ -2a + b - 4 = -6$
- Tangente horizontal $\to \ f'(-2) = 0 \ \to \ a - 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array}\right\} \ \ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array}$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \;\; \to \;\; y = 2x + 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

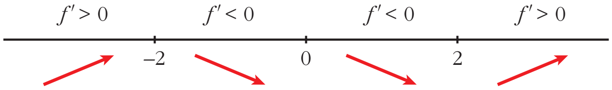
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\; \to \;\; 2x^2 - 8 = 0 \;\; \to \;\; x^2 = 4 \; \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



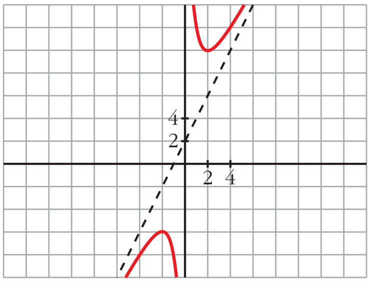
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -6)$.

tiene un mínimo en $(2, 10)$.

- **Gráfica:**



28 **Halla los valores de a, b y c para los cuales la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = -1$ y un mínimo en (0, 1).**

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

Si $y = -1$ es asíntota horizontal $\rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = a \rightarrow a = -1$

Si tiene un mínimo en (0, 1), debe ser $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x^2 - 4) - (ax^2 + bx + c)2x}{(x^2 - 4)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(0) = \frac{b(-4) - 0}{16} = \frac{-b}{4} = 0 \rightarrow b = 0$$

Además, $f(0) = 1 \rightarrow \dfrac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + c}{-4} = 1 \rightarrow c = -4$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{-x^2 - 4}{x^2 - 4}$

29 **Determina las asíntotas de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x}}{3x}$

b) $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

a) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x}}{3x}$

Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

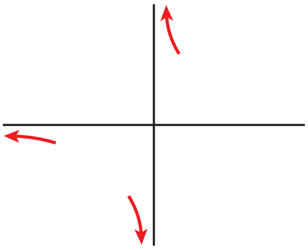
- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x}}{3x} = \pm\infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 \ \ y \to -\infty \\ \text{Si } x > 0 \ \ y \to +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1 - x}}{3x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y < 0)$



b) $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \pm\infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 \ \ y \to -\infty \\ \text{Si } x > 0 \ \ y \to +\infty \end{cases}$$

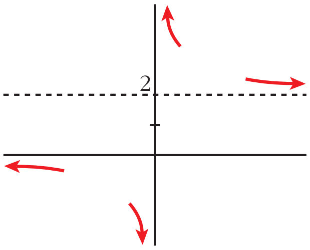
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$$

$y = 2$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ $(y > 2)$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 + 1}}{-x} = 1 - 1 = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y < 0)$.



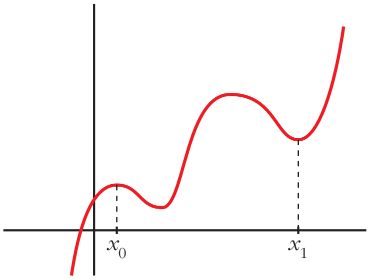
CUESTIONES TEÓRICAS

30 **¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica que tiene dos máximos y dos mínimos relativos? En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que el máximo?**

- Si tiene dos máximos y dos mínimos relativos, y es polinómica, su derivada tiene, al menos, cuatro raíces; es decir, $f'(x)$ será, al menos, de grado 4.

  Por tanto, $f(x)$ será, al menos, de grado 5.

- Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo. Por ejemplo:



El mínimo de x_1 está más alto que el máximo de x_0.

31 **¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de cuarto grado?**

Si $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado, $f'(x)$ será un polinomio de tercer grado y $f''(x)$ será un polinomio de segundo grado.

Así, $f''(x)$ tendrá, a lo sumo, dos raíces.

Por tanto, $f(x)$ tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

32 **Comprueba que la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

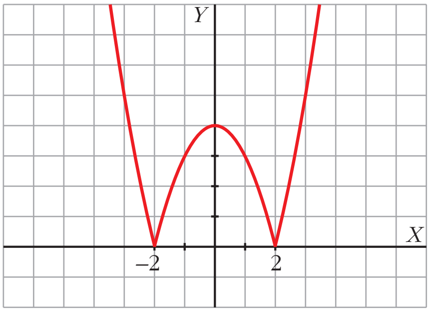
Por tanto:

$$\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} f(x) = \underset{x \to -\infty}{\text{lím}} \frac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow y = -1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}} f(x) = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{x}{x+1} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty.$$

33 **Sobre la gráfica de la función $y = |x^2 - 4|$, indica los intervalos de concavidad y de convexidad. ¿Cuáles son sus puntos de inflexión?**

$$y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



La gráfica es cóncava en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y es convexa en $(-2, 2)$. Los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ son puntos de inflexión (son también mínimos relativos). Podemos comprobarlo con f' y f'':

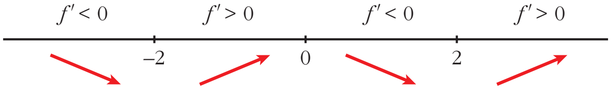
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

No existe $f''(-2)$ ni $f''(2)$.

$f'(-2^-) = -4$, $f'(-2^+) = 4$ > No existe $f'(-2)$.

$f'(2^-) = -4$, $f'(2^+) = 4$ > No existe $f'(2)$.

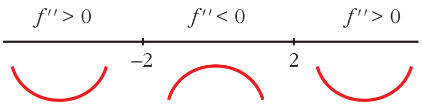
Signo de $f'(x)$: $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$



Mínimos en (–2, 0) y en (2, 0).

Máximo en (0, 4).

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión en (–2, 0) y (2, 0).

Página 334

34 **La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifica esta información.**

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

35 **¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?**

- Asíntotas verticales puede tener infinitas. (Como ejemplo, podemos considerar la función $y = \dfrac{1}{\text{sen } x}$, cuya gráfica está representada en el ejercicio 17, en la gráfica 2).
- Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos: una cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

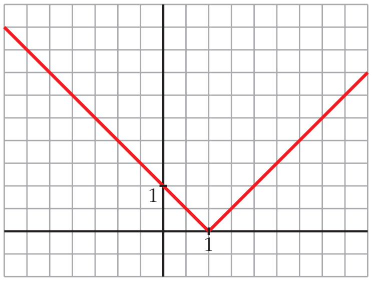
s36 **Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no sea derivable en ese punto. Represéntala.**

$$y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ para } x \neq 1 \end{array}\right\} \to \text{ Hay un mínimo en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pues $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$.

La gráfica es:



s37 **Da un ejemplo de una función que sea derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ y que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.**

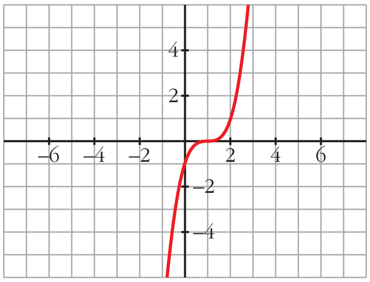
Por ejemplo, $y = (x - 1)^3$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \rightarrow f'(1) = 0$

$f'(x) > 0$ para $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es creciente.

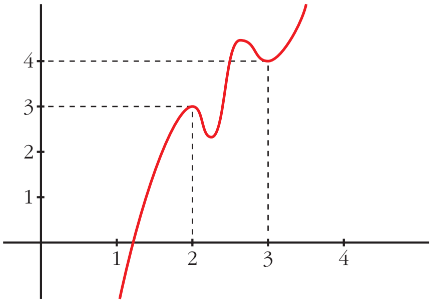
En $x = 1$ hay un punto de inflexión.

La gráfica es:



s38 **Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4).**

Si la función fuera polinómica, ¿cuál habría de ser, como mínimo, su grado?



$f(x)$ debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en $[0, 4]$, si es derivable.

Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues $f'(x)$ se anularía, al menos, en cuatro puntos).

39 **La función $f(x) = x + e^{-x}$, ¿tiene alguna asíntota? En caso afirmativo, hállala.**

$f(x) = x + e^{-x}$

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- No tiene asíntotas verticales.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales.
- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{xe^{x}} \right) = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

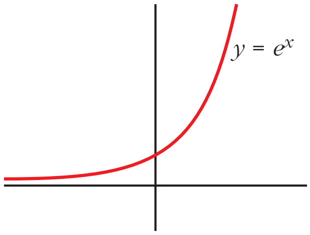
$y = x$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$.

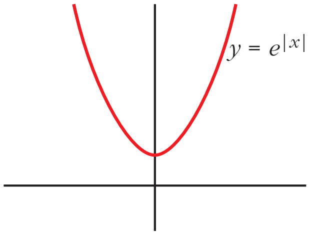
No hay asíntota oblicua hacia $-\infty$ porque:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x + e^{-x}}{x} \right) = 1 + \infty = +\infty$$

40 **¿Son iguales las gráficas de $f(x) = e^{x}$ y $g(x) = e^{|x|}$? Justifica tu respuesta.**

No. Veamos sus gráficas:

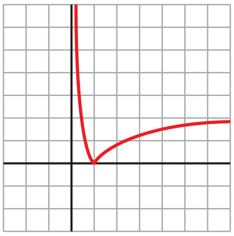




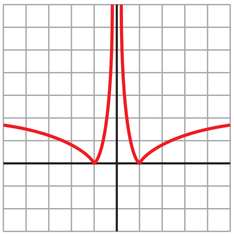
Por ejemplo, si $x = -3 \rightarrow e^{-3} \simeq 0{,}049$; $e^{|-3|} \simeq 20{,}08$

41 **¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función $y = ln\,|x|$ y cuál a $y = |ln\,x|$?**

a)

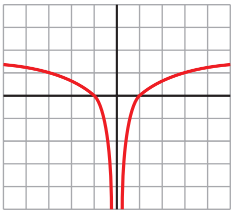


b)

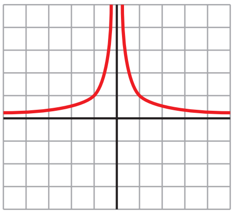


- $y = ln\,|x|$ es la c).
- $y = |ln\,x|$ es la a).

c)



d)



42 **¿Qué tipo de simetría tienen las siguientes funciones?:**

a) $y = sen^2\, x$ **b)** $y = |x| - 2$

c) $y = tg\, x$ **d)** $y = x^3 - x$

a) $y = sen^2\, x$

$f(-x) = sen^2\, (-x) = [sen\, (-x)]^2 \overset{(1)}{=} (-sen\, x)^2 = sen^2\, x$

(1) Porque $sen\, (-x) = -sen\, x$

Como $f(-x) = f(x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al eje Y.

b) $y = |x| - 2$

$f(x) = |x| - 2 \;\rightarrow\; f(-x) = |-x| - 2 = |x| - 2$

Como $f(x) = f(-x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al eje Y.

c) $y = tg\, x$

$f(x) = tg\, x;\; f(-x) = tg\, (-x) = -tg\, x = -f(x)$

Como $f(-x) = -f(x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

d) $y = x^3 - x$

$f(x) = x^3 - x \;\rightarrow\; f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$

Como $f(-x) = -f(x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

PARA PROFUNDIZAR

43 **Estudia y representa $y = arc\, tg\, x$ indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos, si los hubiere.**

$y = arc\, tg\, x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{arc\, tg\, x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{arc\, tg\, x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0 \end{array}\right\}$$

Ramas parabólicas

- **Crecimiento y extremos:**

  $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

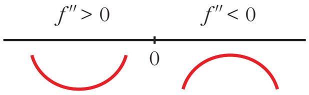
  $f'(x) > 0$ para todo x → $f(x)$ es creciente.

  $f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}$

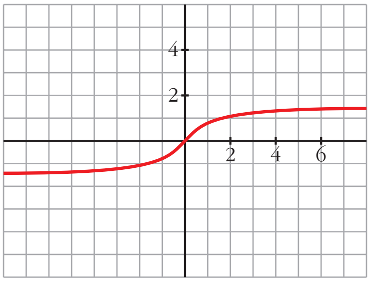
  $f''(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

  Signo de $f''(x)$:



  Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



44 **Representa la función $y = x - arc\ tg\ x$ determinando el dominio de definición, asíntotas, máximos, mínimos e intervalos de crecimiento.**

$y = x - arc\ tg\ x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:** No tiene.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - arc\ tg\ x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[1 - \frac{arc\ tg\ x}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[1 - \frac{1}{1 + x^2}\right] = 1 - 0 = 1 \;\rightarrow\; \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \;\rightarrow\; \text{Rama parabólica}$$

- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

  $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1 + x^2} = \dfrac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$

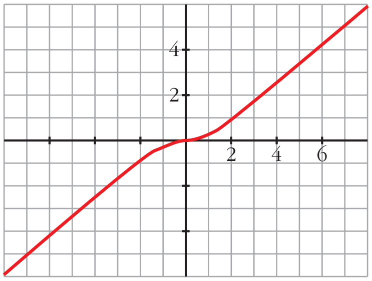
$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

$f'(x) > 0$ para $x \neq 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es creciente.

Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

No tiene máximos ni mínimos.

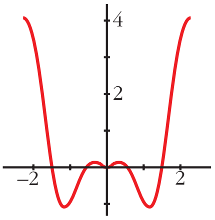
- **Gráfica:**



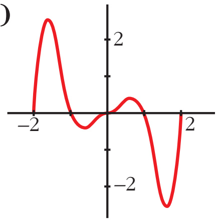
s45 **Las siguientes gráficas corresponden a las funciones $f(x) = x\ sen(\pi x)$; $g(x) = x^2\ sen(\pi x)$; $h(x) = x^2\ cos(\pi x)$ en el intervalo [–2, 2].**

Relaciona, de forma razonada, cada gráfica con su correspondiente función.

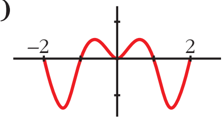
a)



b)



c)



- $f(x)$ y $h(x)$ son funciones pares y $g(x)$ es impar.

  Por tanto, la gráfica de $g(x)$ ha de ser la b).

- $f(2) = 0 \quad \rightarrow$ la gráfica de $f(x)$ es la c).

  Luego la gráfica de $h(x)$ es la a).

- Es decir: a) $h(x)$; b) $g(x)$; c) $f(x)$

46 **Para averiguar las asíntotas de $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ tuvimos que realizar un notable esfuerzo (páginas 320 y 321).**

Sin embargo, utilizando el sentido común y casi sin ningún tecnicismo, podríamos haberlo resuelto fácilmente. Veamos cómo:

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x-1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$$

Es decir, nuestra función, para valores grandes de $|x|$, *se aproxima mucho* a $y = |x - 1|$.

Además, es "un poco menor" (observa que se resta 1 en el radicando). La función $y = |x - 1|$ está formada, precisamente, por las dos asíntotas de nuestra función.

a) Averigua, de forma similar, las asíntotas de:

$$y = \sqrt{x^2 + 2x} \qquad y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$$

b) Ídem, $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

a) $\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x - 1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x + 1)^2} = |x + 1|$

La función $y = |x + 1|$ está formada por las dos asíntotas oblicuas de la función:

$$y = \sqrt{x^2 + 2x}$$

$\sqrt{x^2 - 6x + 12} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2} = \sqrt{(x - 3)^2 + 2} \approx \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$

La función $y = |x - 3|$ está formada por las dos asíntotas oblicuas de la función:

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$$

b) Para valores grandes de $|x|$, tenemos que:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \approx \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Así, $y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Página 335

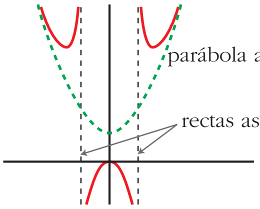
47 **Aunque la palabra *asíntota* la hemos aplicado a rectas que se aproximan a una gráfica, tiene un significado más amplio: se dice que dos curvas son *asintóticas* cuando, al alejarse del origen, la distancia entre ellas tiende a cero.**

Por ejemplo, la parábola $y = x^2 + 1$ es *asintótica* a la función:

$y = f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ (revisa su gráfica en la página 319). Es fácil comprobarlo:

$\dfrac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$ (Simplemente hemos efectuado el cociente).

La diferencia entre las dos funciones es $\dfrac{1}{x^2 - 1}$, que tiende a cero cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. Además, toma valores positivos, por lo que la gráfica de $y = f(x)$ queda por encima de la parábola. Este resultado permite representar la función de forma más precisa apoyándonos en la representación de la parábola:



a) Razonando de la misma forma, halla la parábola asintótica a la función:

$$\boldsymbol{y = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x}}$$

Determina la posición de la curva respecto de ella.

b) Representa la gráfica de la función teniendo en cuenta esos datos, así como la asíntota vertical y el punto singular (solo hay uno de abscisa *x* = 2).

a) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x} = x^2 - 2x + 1 + \dfrac{8}{x}$

La parábola es $y = x^2 - 2x + 1$.

- Cuando $x \to -\infty$, la diferencia entre la función y la parábola, $\dfrac{8}{x}$, es negativa; luego, la curva está por debajo de la parábola.

- Cuando $x \to +\infty$, la diferencia, $\dfrac{8}{x}$, es positiva; luego, la curva está por encima de la parábola.

b) **Asíntota vertical:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

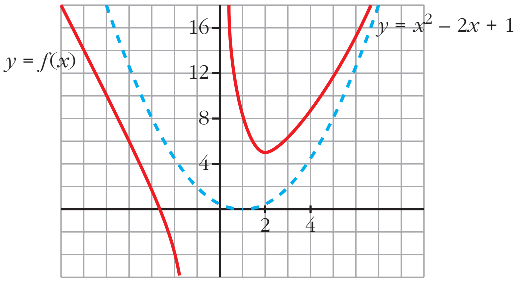
- **Punto singular:**

$$f'(x) = 2x - 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^3 - 2x^2 - 8 = 0 \quad \to \quad 2(x - 2)(x^2 + x + 2) = 0 \quad \to \quad x = 2$$

Hay un mínimo en (2, 5).

- **Gráfica:**



48 **Halla, en cada caso, la parábola asintótica y estudia la posición de la curva con respecto de ella. Representa la información obtenida:**

a) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{x^3-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^4}{x^2-4}$ **d)** $y = \dfrac{x^3}{x+1}$

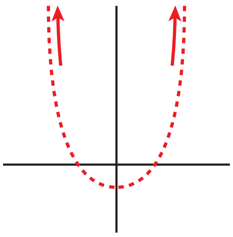
a) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1} \to$ Dividimos:

$$\begin{array}{rl}
x^4 & \big|\,\underline{x^2+1} \\
\underline{-x^4-x^2} & \ \ x^2-1 \\
-x^2 & \\
\underline{x^2+1} & \\
1 &
\end{array}$$

Así, $y = \dfrac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$

Parábola asintótica: $y = x^2 - 1$

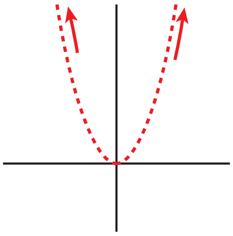
Posición:



b) $y = \dfrac{x^3-1}{x} = x^2 - \dfrac{1}{x}$

Parábola asintótica: $y = x^2$

Posición:



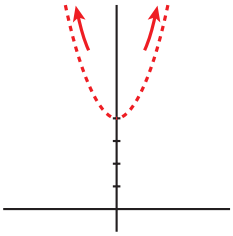
c) $y = \dfrac{x^4}{x^2-4} \to$ Dividimos:

$$\begin{array}{rl}
x^4 & \big|\,\underline{x^2-4} \\
\underline{-x^4+4x^2} & \ \ x^2+4 \\
4x^2 & \\
\underline{-4x^2+16} & \\
16 &
\end{array}$$

Así: $y = \dfrac{x^4}{x^2-4} = x^2 + 4 + \dfrac{16}{x^2+4}$

Parábola asintótica: $y = x^2 + 4$

Posición:



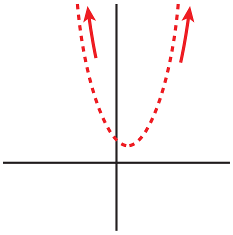
d) $y = \dfrac{x^3}{x+1} \to$ Dividimos:

$$\begin{array}{rl} x^3 & \underline{|\;x+1\quad} \\ \underline{-x^3 - x^2} & x^2 - x + 1 \\ -x^2 & \\ \underline{x^2 + x} & \\ x & \\ \underline{-x - 1} & \\ -1 & \end{array}$$

Así: $y = \dfrac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$

Parábola asintótica: $y = x^2 - x + 1$

Posición:



49 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ **b)** $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ **c)** $y = ln(sen\ x)$

d) $y = 2x + sen\ 2x$ **e)** $y = \dfrac{sen\ x}{x} + 2$ **f)** $y = \dfrac{cos\ x}{x}$

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

- **Dominio:**

  $e^x - e^{-x} = 0 \to e^x = e^{-x} \to x = 0$

  $D = \mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \to y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < -1)$.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \to y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 1)$.

b) $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No hay asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > 0)$.

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$$

  $y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) < 1)$.

c) $y = ln\ (sen\ x)$

- **Dominio:**

  Solo está definida cuando $sen\ x > 0$; es decir, en los intervalos:

  $(0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \cup \ldots$

  El dominio son todos los intervalos de la forma:

  $\big(2k\pi, (2k + 1)\pi\big)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- **Asíntotas:**

  $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2k\pi^+} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to (2k+1)\pi^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2k\pi;\ x = (2k+1)\pi \text{ son asíntotas verticales} \\ (\text{con } k \in \mathbb{Z}). \end{array}$$

  No hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

  (No existe $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ni $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$).

d) $y = 2x + sen\ 2x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas.

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + sen\ 2x}{x} = 2$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \big[f(x) - 2x\big] = \lim_{x \to +\infty} sen\ 2x \text{ no existe.}$$

  (El razonamiento es análogo cuando $x \to -\infty$).

e) $y = \dfrac{sen\ x}{x} + 2$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

  $$\lim_{x \to 0} \left[\frac{sen\ x}{x} + 2 \right] = 3.$$ No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \to \quad y = 2$$ es asíntota horizontal.

  (La curva corta a la asíntota infinitas veces).

f) $y = \dfrac{\cos x}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

  $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal.

  (La curva corta a la asíntota horizontal infinitas veces).

Página 335

AUTOEVALUACIÓN

1. Se considera la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Tiene máximos y/o mínimos? ¿Tiene algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad 3x^2 = -2 \quad \to$ no tiene solución.

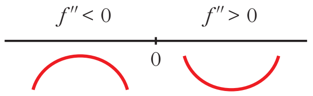
  $f'(x) > 0$ para todo $x \quad \to \quad f(x)$ es creciente.

  No tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = 6x$

  $f''(x) = 0 \quad \to \quad 6x = 0 \quad \to \quad x = 0$

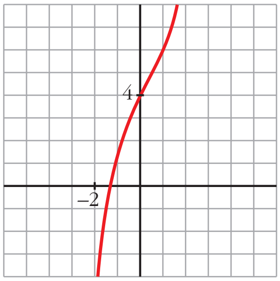
  Signo de $f''(x)$:



  Hay un punto de inflexión en (0, 4).

- Además, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

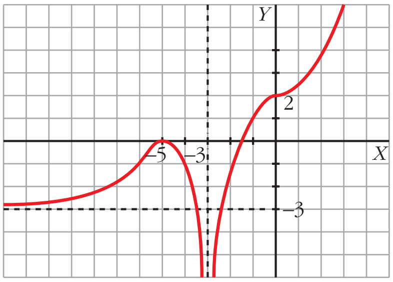
- Gráfica:



2. **Dibuja la gráfica de una función f de la que sabemos:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -3; \quad \lim_{x \to -3} f(x) = -\infty;$$

$$f'(-5) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad f(-5) = 0; \quad f(0) = 2$$



Tiene tangente horizontal en los puntos (–5, 0) y (0, 2). En el primero tiene un máximo, y en el segundo, un punto de inflexión.

3. **Estudia las asíntotas y los puntos singulares de $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+1}$ y represéntala gráficamente.**

$f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+1}$. Dominio: $\mathbb{R} - \{-1\}$

- Asíntota vertical: $x = -1$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

- No tiene asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+2)^2}{x+1} = \pm\infty$$

- Asíntota oblicua:

$$\frac{(x+2)^2}{x+1} = x + 3 + \frac{1}{x+1}$$

La asíntota oblicua es $y = x + 3$.

Posición de la curva con respecto a la asíntota:

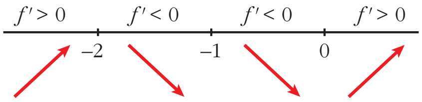
$$f(x) - (x + 3) = \frac{1}{x+1} \begin{cases} \text{Si } x \to +\infty \;\to\; f(x) > x + 3 \left(\text{porque } \dfrac{1}{x+1} > 0\right) \\ \text{Si } x \to -\infty \;\to\; f(x) < x + 3 \left(\text{porque } \dfrac{1}{x+1} < 0\right) \end{cases}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(x+2)(x+1) - (x+2)^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

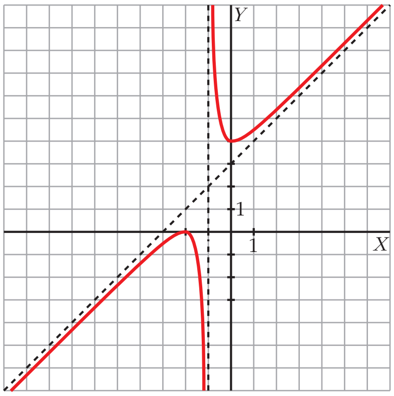
$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2 + 2x = 0 \begin{array}{l} x = 0,\; f(0) = 4 \\ x = -2,\; f(-2) = 0 \end{array}$$

Signo de f':



Tiene un máximo en (–2, 0) y un mínimo en (0, 4).

- Gráfica:



4. **Representa esta función:** $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}}$

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$. Dominio = $\mathbb{R}$

- No tiene asíntotas verticales, porque $e^x \neq 0$ para todo x.

- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \;\to\; y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty \;\to\; f(x) > 0$

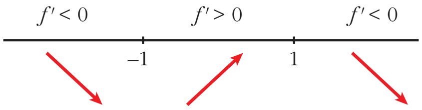
  $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \;\to\;$ No tiene asíntota horizontal hacia $-\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x + 2 - (x+1)^2}{e^x} = \frac{-x^2+1}{e^x}$$

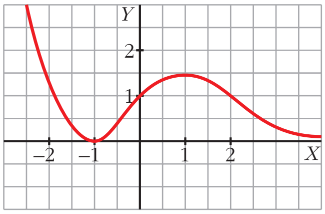
$$f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \begin{cases} x = 1, \; f(1) = \dfrac{4}{e} \\ x = -1 \;\; f(-1) = 0 \end{cases}$$

Signo de f':



Mínimo: (–1, 0); Máximo: $\left(1, \dfrac{4}{e}\right)$

- Gráfica:



5. **En la función $y = \dfrac{4x^3+1}{x}$, halla los puntos de corte con los ejes y las asíntotas. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y esboza la gráfica.**

$$y = \frac{4x^3+1}{x}$$

- Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} OX: \; y = 0 \rightarrow 4x^3 + 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{-1/4} \\ OY: \; x = 0 \;\; \text{no existe.} \end{cases}$

- Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{4x^3+1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{4x^3+1}{x} = +\infty$$

- No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas, ya que:

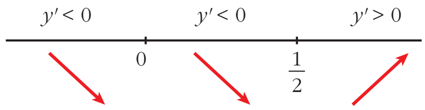
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^3+1}{x} = +\infty \;\; \text{y} \;\; \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^3+1}{x^2} = \pm\infty$$

- Crecimiento:

$$y' = \frac{12x^2 \cdot x - 4x^3 - 1}{x^2} = \frac{8x^3-1}{x^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow 8x^3 - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}, \; f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

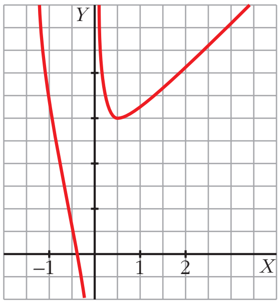
Signo de y':



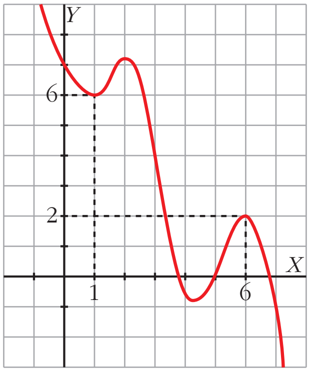
Crece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Decrece en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

- Gráfica:



6. **Dibuja una función continua en $\mathbb{R}$ que tenga un mínimo relativo en (1, 6) y un máximo relativo en (6, 2). Si es un polinomio, ¿cuál será, como mínimo, su grado?**



La función tendrá, como mínimo, cuatro puntos singulares, y para ello, su grado debe ser, al menos, 5.

7. **Halla los máximos y los mínimos de la función $f(x) = x\sqrt{x+3}$. ¿Tiene asíntotas? Haz una gráfica aproximada de esta función.**

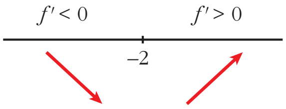
$f(x) = x\sqrt{x+3}$, Dominio = $(-3, +\infty)$

- Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x + 6 = 0 \rightarrow x = -2,\ f(-2) = -2$

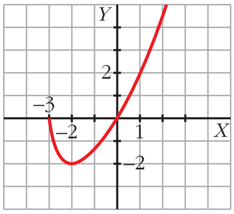
Signo de f':



La función tiene un mínimo en (–2, –2).

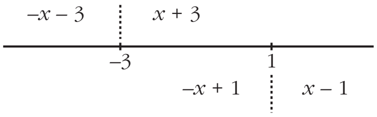
- La función no tiene asíntotas: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

- Gráfica:



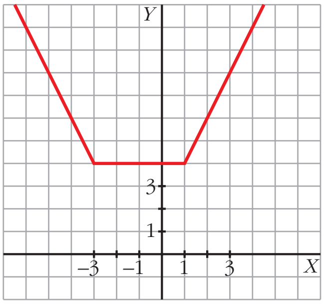
8. **Dibuja la gráfica de $f(x) = |x + 3| + |x - 1|$.**

$f(x) = |x + 3| + |x - 1|$



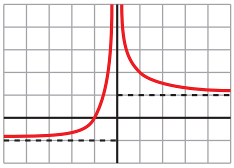
- Si $x < -3$: $-x - 3 - x + 1 = -2x - 2$
- Si $-3 \le x < 1$: $x + 3 - x + 1 = 4$
- Si $x \ge 1$: $x + 3 + x - 1 = 2x + 2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \le x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

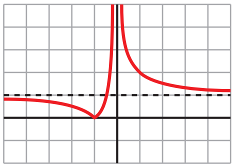


9. **¿Qué gráfica corresponde a $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x|}$?**

a)



b)



$$f(x) = \frac{x + 1}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x + 1}{-x} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x + 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 1}{-x} = -1 \\[2mm] \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x} = 1 \end{array}\right\}$$

- Asíntota vertical: $x = 0$
- Asíntotas horizontales: $y = -1$ e $y = 1$

La gráfica de f es la a).